

数学Ⅱ, 数学Ⅲ, 数学A, 数学B, 数学C (理学部数学科)

〔注意事項: 1 ~ 4 は必須, 5 ~ 7 から1問選択すること.〕
 選択した問題以外の解答を記入した場合は無効である.

- 1 p, q は正の数で, $p < q$ とする. 等比数列 $\{a_n\}$ と等差数列 $\{b_n\}$ が,
 $a_2 = b_3 = p, a_3 = b_4 = q$ をみたすとき, 次の問いに答えよ.
- (1) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
 - (2) $n \geq 3$ のとき, $b_n \geq p$ が成り立つことを示せ.
 - (3) すべての自然数 n に対して, $a_n > b_n$ が成り立つことを示せ. (80点)

- 2 θ を定数とし,
- $$S_n = \frac{1}{2} \sin \theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin 2\theta + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin n\theta$$
- $(n = 1, 2, 3, \dots)$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 加法定理を用いて

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \sin n\theta \cos \theta$$

であることを示せ.

- (2) 数学的帰納法を用いて

$$S_n = \frac{2^{n+1} \sin \theta + \sin n\theta - 2 \sin(n+1)\theta}{2^n(5 - 4 \cos \theta)}$$

であることを示せ.

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を θ を用いて表せ. (80点)

- 3 平面上の異なる4点A, B, C, Dについて,
 $\overrightarrow{AB} = (3, -1), \overrightarrow{BC} = (a, b), \overrightarrow{CD} = (c, -3c)$

とする. ただし, a, b, c は実数で, a と b は同符号とする.

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) c の値を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{AD}$ が平行であるとき, a と b の関係を求めよ.
- (3) (2)において, $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BD}$ が垂直であるとき, a, b の値はいくらか.
- (4) (3)において, 四角形ABCDの面積を求めよ. (80点)

- 4 半径1の円が x 軸に接しながら正の方向にすべらないで1回転するとき, 円周上に固定された点Pがえがく曲線をCとする. 点Pが原点Oに重なった位置から動き始めるとして, この円が角 θ だけ回転したときのPの座標 (x, y) は
- $$x = \theta - \sin \theta, \quad y = 1 - \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$
- と表される. 次の問いに答えよ.

- (1) C上の点P(ただし, $0 < \theta < 2\pi$)における接線のうち, 傾きが1, -1 である接線をそれぞれ l, m とする. l と m の方程式を求めよ.
- (2) 曲線Cと2つの接線 l, m とで囲まれた部分の面積を求めよ. (80点)

5 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とし、複素数 $z (z \neq 0)$ に対して

$$f(z) = \omega z, \quad g(z) = \frac{1}{z}$$

とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。

(1) $f(g(z)) = g(f(f(z)))$, $g(f(z)) = f(f(g(z)))$

が成り立つことを示せ。

(2) $g(z)$, $g(f(z))$, $g(f(f(z)))$ は異なる 3 点であることを示せ。

(3) 集合 $\{g(z), g(f(z)), g(f(f(z))), f(z), f(g(z)), f(f(g(z)))\}$

が 3 個の元からなるとき、 z を求めよ。 (80 点)

6 A を 3 次の正方行列、 E を 3 次の単位行列、 O を 3 次の零行列とする。次の問いに答えよ。

(1) $(E - A)(E + A + A^2)$ を計算せよ。

(2) $A^3 = O$ のとき、 $(E - A)X = E$ をみたす 3 次の正方行列 X を E と A を用いて表せ。

(3) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & -10 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ のとき、 $BY = E$ をみたす 3 次の正方行列 Y を求

めよ。 (80 点)

7 1 次変換 $f: (x, y) \rightarrow (by, -ax)$ について、 $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n (n \geq 1)$ とし、単位円 C を f^n で移した図形を C_n とする。 $ab \neq 0$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) C_n は単位円であることを示せ。ただし、円は単位円の特別な場合である。

(2) $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ の中に単位円 C と一致するものがあるとき、 a と b のみたす条件を求めよ。

(3) $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ がすべて C と一致するとき、 a と b の値を求めよ。 (80 点)