

平成11年度 入学試験問題(前期日程用)

数 学

(数学Ⅱ, 数学Ⅲ, 数学B, 数学C)

試験時間 120分

理学部(数理情報科学科, 物質科学科)

1 Cは中心が(4, 1)で半径が1の円とする. C上の点Q $\left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ におけるCの接線を l とし, l と x 軸との交点をPとする. 次の問いに答えよ.

(1) l の方程式およびPの座標を求めよ.

(2) P, Qと点(4, 0)を3頂点とする三角形の内部および周をDとする. 点 (x, y) がD上を動くとき, $\frac{y-a}{x}$ (a は定数)の最大値を求めよ.

(100点)

2 不等式

$$\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2) + 2 \leq \log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 1) + \log_{\frac{1}{8}} x^3$$

を満たす x の範囲を求めよ.

(100点)

3 $f(x)$ は微分可能な関数で, $f(-x)=f(x)+2x$, $f'(1)=1$, $f(1)=0$ を満たすものとする. 次の問いに答えよ.

(1) $f'(-1)$ の値を求めよ.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+f(-x)-2}{x-1}$ の値を求めよ.

(100 点)

4 関数 $f(x)$ は微分可能で, $f'(x)$ は連続とし, $f(x)$ は関係式

$$f(x) + \int_0^x f(t) dt = \sin x$$

を満たしているとする. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ と $f'(x)$ との間に成り立つ関係式を求めよ.

(2) $\frac{d}{dx}(e^x f(x))$ を指数関数と三角関数で表せ.

(3) $\int_0^x e^t (\sin t + \cos t) dt = \int_0^x e^t (\sin t - \cos t) dt + e^x (\sin x + \cos x) - 1$ を示せ.

(4) $\int_0^x e^t \cos t dt$ を求めよ.

(5) $f(x)$ を求めよ.

(100 点)

5 複素数 z について $\frac{z}{z - \sqrt{2}}$ は虚軸上にあるとする。次の問いに答えよ。

- (1) z はどのような図形上にあるか。
- (2) このような z のうち $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ からの距離が最大となるものを求めよ。
- (3) (2)で求めた z について、 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$ を計算せよ。

(100 点)

6 行列 $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -4 & y \end{pmatrix}$ は、ある自然数 n に対して $A^n = O$ になるとする。ただし O は零行

列である。次の問に答えよ。

- (1) $xy + 4 = 0$ を示せ。
- (2) 任意の自然数 m に対して $A^{m+1} = (x+y)^m A$ となることを示せ。
- (3) x, y を求めよ。

(100 点)