

1

実数 θ の関数

$$y = \sin 2\theta + \sin \theta + \cos \theta$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおいて、 y を t の関数で表せ。
- (2) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) y のとりうる値の範囲を求めよ。

(60 点)

2

以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c, d を実数とする。実数 x の 4 次関数

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

のグラフが 2 点 $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) のみで x 軸に接しているとき、

$$s = \alpha + \beta, \quad t = \alpha\beta$$

とおく。このとき、係数 a, b, c, d を s, t を用いて表せ。

- (2) (1)において、4 次関数と x 軸とで囲まれる図形の面積を α, β を用いて表せ。
- (3) $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2$ に異なる 2 点で接する接線の方程式を求めよ。

(60 点)

3

a, b は実数で, $b^2 - a^2 = 1$ を満足する。以下の問いに答えよ。

- (1) 複素数 z が次の方程式

$$\frac{az - b}{bz - a} = z$$

を満足するとき, z は単位円周上にあることを示せ。

- (2) a, b が整数であるとき, 上の方程式を満足する z を求めよ。

(60 点)

4

空間において、原点 O に中心を持つ半径 r の球面上に異なる 3 点 A, B, C がある。点 H が

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

を満足するとき、次の問いに答えよ。

- (1) $H \neq A$ のとき、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ であることを示せ。
- (2) 4 点 O, A, B, C が四面体の頂点となるとき、4 点 H, A, B, C も四面体を作ることができることを示し、四面体 $OABC$ と四面体 $HABC$ の体積の比を求めよ。
- (3) $H = O$ のとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか。

(70 点)