

1

n, k は $1 \leq k \leq n$ を満たす整数であり,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$2 < a_n < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$$

- (2) $n \geq 2$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} < 1$$

- (3) $n \geq 1$ のとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = a_n a_{n-1} \cdots a_1$$

- (4) $n \geq 3$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$3 \left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

(140 点)

2

次の問いに答えよ。

- (1) 次の2次方程式の解を求めよ。

$$x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$$

- (2) (1)で求めた解の中で偏角が小さい方の解を
- t
- とする。ただし、偏角は
- 0°
- から
- 360°
- の範囲で考える。複素数
- α
- ,
- β
- ,
- γ
- が等式

$$\gamma = (1 - t)\alpha + t\beta$$

を満足するとき、複素平面上でそれぞれの複素数が表す点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が作る $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

(100点)

3 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 2\pi$ において $y = e^{-x} \sin x$ の増減, 凹凸の表を作り, グラフの概形を描け。

(2) n を 0 以上の整数とする。次の s_n を求めよ。

$$s_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |e^{-x} \sin x| dx$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を次の様に定義する。

$$a_n = \sum_{k=0}^n s_k$$

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(160 点)

4

A を 2 次の正方行列とする。また, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ は零でないベクトルとし, 次の関係式を満足している。

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ。

(1) $ad \neq bc$ を示せ。

(2) n を正の整数とすると, A^n を a, b, c, d, n を用いて表せ。

(100 点)