

1 $\alpha + \beta = \alpha\beta$, $|\alpha| = |\beta| = 1$ を満たす複素数 α , β の組をすべて求めよ。

(120 点)

2

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = (a_n^2 \text{ を } 11 \text{ で割った余り}) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) 1 より大きい自然数 n のうち, $a_n = 5$ となる最小のものを求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ の値を求めよ。

(120 点)

3

次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。

$$\sin^2 x \geq \sin^3 x \geq \sin^4 x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

(2) t の関数

$$\frac{1}{2} \{t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})\}$$

を微分せよ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^3 x} \, dx \leq \frac{1}{2} \{\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})\}$$

(130 点)

4

A, B は 2 次の正方行列で, 等式 $BA = A^2B$ を満たすものである。

- (1) BA^2 を A^iB^j (i, j は自然数) の形で表せ。
- (2) $(AB)^3$ を A^iB^j (i, j は自然数) の形で表せ。
- (3) 自然数 n に対して $BA^n = A^{2n}B$ となることを数学的帰納法によって証明せよ。
- (4) 自然数 n について $2^n + 1 = \langle n \rangle$ と略記するとき,

$$(AB)^n = A^{\langle n \rangle} B^n$$

となることを数学的帰納法によって証明せよ。

(130 点)