$\boxed{1}$

(1)

$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ を変形すると，

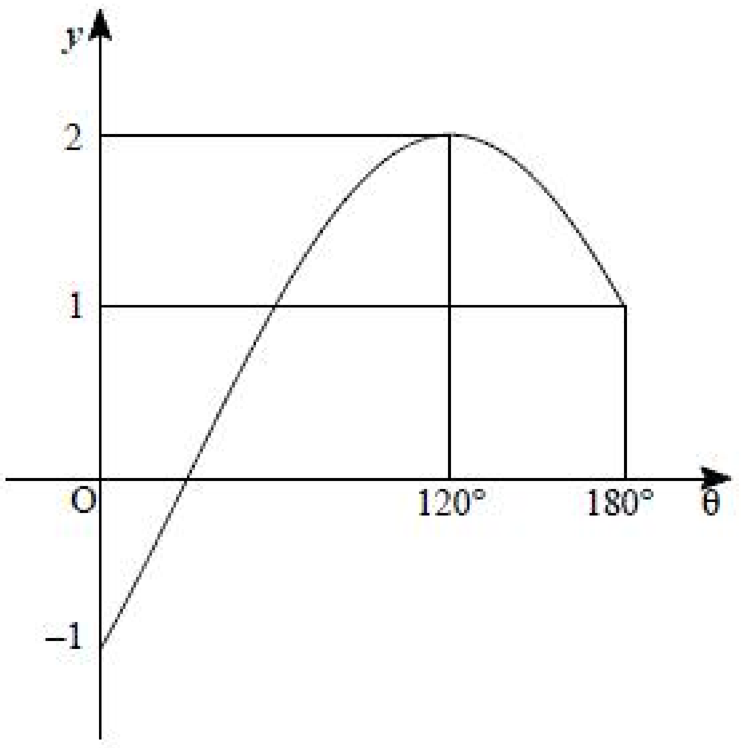
$$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\sin\left(\theta-30^\circ\right)$$

となる。

(答) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-30^\circ\right)$

(2)

(1)の結果より，$y=2\sin\left(\theta-30^\circ\right)$ のグラフを考える。これは，$y=2\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に 30° だけ平行移動した曲線である。したがって，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ での範囲で図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(3)

t^2 を計算すると，

$$t^2=\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)^2$$
$$=3\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1+2\sin^2\theta-\sqrt{3}\left(2\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$=1+2\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}-\sqrt{3}\sin2\theta$$
$$=2-\left(\sqrt{3}\sin2\theta+\cos2\theta\right)$$

が得られる。これを与えられた式に代入すると，

$$f(\theta)=a\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)-\left(\sqrt{3}\sin2\theta+\cos2\theta\right)+a+1$$
$$=at+\left(t^2-2\right)+a+1$$
$$=t^2+at+a-1$$

となる。したがって，題意は示された。

(証明終)

(4)

(2)のグラフより，t の値に対応する θ の個数は，

$$\begin{cases} t=2\text{のとき} & \theta\text{は1個} \\ 1\leqq t<2\text{のとき} & \theta\text{は2個} \\ -1\leqq t<1\text{のとき} & \theta\text{は1個} \\ -1<t,\ 2<t\text{のとき} & \theta\text{は0個} \end{cases}$$

となる。ここで，$g(t)=t^2+at+a-1$ として変形すると，

$$g(t)=t^2+at+a-1$$
$$=(t+1)(t+a-1)$$

であるから，$t=-1$ は $g(t)=0$ の解である。$f(\theta)=0$ が異なる3つの解をもつには，$g(t)=0$ のもう1つの解が $1\leqq t<2$ の範囲にあればよい。したがって，

$$1\leqq1-a<2$$
$$\Leftrightarrow-1<a\leqq0$$

が得られる。

(答) $-1<a\leqq0$

2

(1)

$|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=5, |\vec{a}-\vec{b}|=4$ であるから，$|\vec{a}-\vec{b}|^2$ を計算すると，

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$\Leftrightarrow 4^2=6^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2$$
$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{45}{2}$$

が得られる。

(答) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{45}{2}$

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ について，始点を O にそろえると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。C は辺 OA を $5:3$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{5}{8}\vec{a}-\vec{b}$$

が得られる。したがって，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を計算すると，

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}\cdot\left(\frac{5}{8}\vec{a}-\vec{b}\right)$$
$$=\frac{5}{8}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=\frac{5}{8}\cdot6^2-\frac{45}{2}$$
$$=0$$

となる。$\vec{a}\neq0, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq0$ であるから，$\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が示された。

(証明終)

(3)

$\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから，

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$$

が成立している。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ について，始点を O にそろえると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

となる。D は辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=-\vec{a}+t\vec{b}$$

が得られる。ここで，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$ であるから，

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$$
$$\Leftrightarrow \vec{b}\cdot\left(-\vec{a}+t\vec{b}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{45}{2}+25t=0$$
$$\therefore t=\frac{9}{10}$$

となる。

(答) $t=\frac{9}{10}$

(4)

$\vec{a}, \vec{b}$ は互いに一次独立であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

と書ける。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を変形すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{8}{5}\alpha\right)\cdot\frac{5}{8}\vec{a}+\beta\vec{b}$$

とできる。ここで，点 H は辺 BC 上の点であるから，

$$\frac{8}{5}\alpha+\beta=1 \qquad \cdots ①$$

が成立する。また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を変形すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\vec{a}+\left(\frac{10}{9}\beta\right)\cdot\frac{9}{10}\vec{b}$$

ともできる。ここで，点 H は辺 AD 上の点であるから，

$$\alpha+\frac{10}{9}\beta=1 \qquad \cdots ②$$

が成立する。①, ②を解くと，$\alpha=\frac{1}{7}, \beta=\frac{27}{35}$ が得られる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{27}{35}\vec{b}$$

となる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{27}{35}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$
$$=\frac{1}{35}\left(-5|\vec{a}|^2-22\vec{a}\cdot\vec{b}+27|\vec{b}|^2\right)$$
$$=\frac{1}{35}\left(-5\cdot6^2-22\cdot\frac{45}{2}+27\cdot5^2\right)$$
$$=0$$

が得られる。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\neq0, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq0$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる。

(証明終)

$\boxed{3}$

(1)

直線 $x+y=k-1$ を直線 l_k $(k=1, 2, 3\cdots)$ とする。直線 l_k 上には k 個の格子点がある。格子点 $(0, n)$ は $x+y=n$ 上にある。したがって，格子点 $(0, n)$ の番号は $x+y=k-1$ $(k=1, 2, 3\cdots n+1)$ 上にある格子点の数の和であるから，

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

となる。

(答) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

(2)

(1)の結果により，格子点 $(0, 27)$ の番号は，

$$\frac{28\cdot 29}{2} = 406$$

である。格子点 $(2, 25)$ は格子点 $(0, 27)$ より番号が 2 番手前であるから，その番号は，

$$406-2=404$$

となる。

(答) 404

(3)

(1)の結果により，格子点 $(0, m+n)$ の番号は $\dfrac{(m+n+1)(m+n+2)}{2}$ である。格子点 (m, n) は格子点 $(0, m+n)$ より番号が m 番手前であるから，その番号は，

$$\frac{(m+n+1)(m+n+2)}{2}-m$$

となる。

(答) $\dfrac{(m+n+1)(m+n+2)}{2}-m$

4

(1)

放物線Cの上の点$(t,\ t^2+1)$を通る放物線Cの接線の方程式は,

$$y-(t^2+1)=2t(x-t)$$
$$\Leftrightarrow y=2tx-t^2+1$$

である。この直線が点A$(a,\ a)$を通るので,

$$a=2at-t^2+1$$
$$t^2-2at+a-1=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

が得られる。①の判別式をDとすると,

$$\frac{D}{4}=a^2-a+1$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$
$$>0$$

であるから,①は異なる2つの実数解をもつ。①の方程式を解くと,

$$t=a\pm\sqrt{a^2-a+1}$$

が得られる。また,①式を変形すると,

$$t^2-2at+a-1=0$$
$$\Leftrightarrow -t^2+1=-2at+a$$
$$\Leftrightarrow -t^2+1=a\left(1-2a\mp\sqrt{a^2-a+1}\right)$$

が得られる。したがって,求める2直線の方程式は,

$$y=2\left(a\pm\sqrt{a^2-a+1}\right)x+a\left(1-2a\mp\sqrt{a^2-a+1}\right)$$

となる。

(答) $y=2\left(a\pm\sqrt{a^2-a+1}\right)x+a\left(1-2a\mp\sqrt{a^2-a+1}\right)$

(2)

方程式①の2つの解を$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおく。すなわち,

$$\alpha=a-\sqrt{a^2-a+1},\ \beta=a+\sqrt{a^2-a+1}$$

とおく。このとき,(1)の2直線はそれぞれ,

$$y=2\alpha x-\alpha^2+1$$
$$y=2\beta x-\beta^2+1$$

となる。したがって,求める図形の面積$S(a)$は,

$$S(a)=\int_\alpha^a\left\{(x^2+1)-(2\alpha x-\alpha^2+1)\right\}dx+\int_a^\beta\left\{(x^2+1)-(2\beta x-\beta^2+1)\right\}dx$$
$$=\int_\alpha^a(x-\alpha)^2dx+\int_a^\beta(x-\beta)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^a+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_a^\beta$$
$$=\frac{1}{3}(a-\alpha)^3-\frac{1}{3}(a-\beta)^3$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2-a+1}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{a^2-a+1}\right)^3$$
$$=\frac{2}{3}(a^2-a+1)^{\frac{3}{2}}$$

となる。

(答) $S(a)=\frac{2}{3}(a^2-a+1)^{\frac{3}{2}}$

(3)

(2)の式を変形すると,

$$S(a)=\frac{2}{3}(a^2-a+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

が得られる。したがって,$S(a)$を最小にするaは$a=\frac{1}{2}$である。

(答) $a=\frac{1}{2}$