平成19年度　入学試験問題(前期日程)

数　　学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

試験時間　120分

理学部(数理情報科学科)

問題冊子　　問題…… $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$　　ページ…… 1 ～ 2

解答用紙…… 4枚

下書用紙…… 1枚

配点…表示のとおり。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
   なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配布された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

1 aは定数とする。

$$f(\theta)=a(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)-(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta)+a+1$$

について，次の問いに答えよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$を$r\sin(\theta+\alpha)$の形に変形せよ。ただし，$r>0$とする。

(2) 関数$y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$のグラフの概形をかけ。

(3) $t=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$とおくとき，$f(\theta)$を$t$を用いて表せ。

(4) 方程式$f(\theta)=0$が相異なる3つの実数解をもつようなaの範囲を求めよ。

(130点)

2 3個の空間ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は原点に始点をもつ長さ1のベクトルである。これらの内積の和

$$t=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{b}$，$\vec{c}$を固定して，$\vec{a}$のみを動かす。このとき，tの最小値は$\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{b}+\vec{c}|$であることを示せ。

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を自由に動かしたときのtの最小値を求めよ。

(3) (2)の最小値を与えるベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$の終点はどのような3角形を作るか。

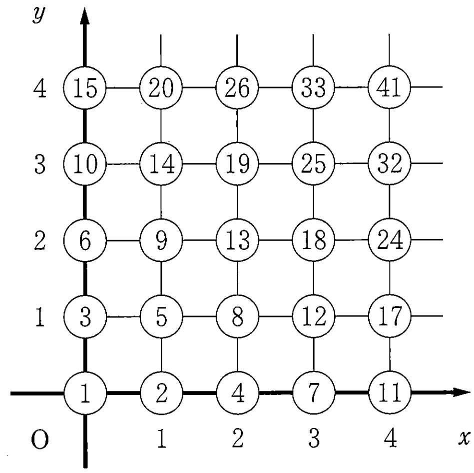
(120点)

3 xy 平面で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の範囲にあるすべての格子点 (m, n) に，右図のような規則で番号をふる。ただし，右図において，◯の中の数字がその格子点の番号である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 格子点 $(0, n)$ の番号を n を用いて表せ。

(2) 格子点 (m, n) の番号を m，n を用いて表せ。

(3) 番号が 2007 となる格子点の座標を求めよ。



(130 点)

4 整数 $n\,(n \geqq 0)$ に対して $S_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x(\log x)^n$ の導関数を求めることにより，$S_n = e - nS_{n-1}\,(n \geqq 1)$ であることを示せ。

(2) 初項 $a_1 = 0$，漸化式 $a_n = 1 - na_{n-1}\,(n \geqq 2)$ を満足する数列 $\{a_n\}$ を用いて，$S_n\,(n \geqq 1)$ は次のように表せることを数学的帰納法を用いて示せ。

$$S_n = a_n e + (-1)^{n+1} n!$$

(3) (2)の数列 $\{a_n\}$ は次を満足することを示せ。

$$\frac{(-1)^n a_n}{n!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \qquad (n \geqq 2)$$

(4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n!} = 0$ を示し，それを用いて，次が成り立つことを示せ。

$$e^{-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

(120 点)