

(1)

 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

である。3次関数 $f(x)$ が $x=1, -3$ で極値をとり、極小値が -5 であることから、

$$\begin{cases} f'(1) = f'(-3) = 0 \\ f(1) = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 27 - 6a + b = 0 \\ 1 + a + b + c = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 0 \end{cases}$$

である。

(答) $a=3, b=-9, c=0$

(2)

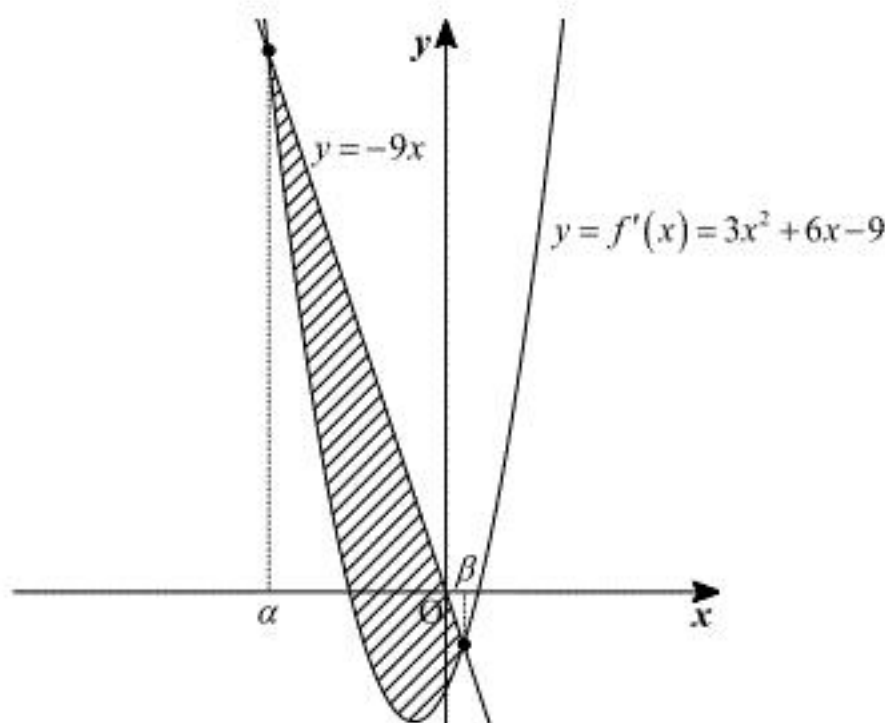
点 $(0, c)$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + c \\ &= -9x \end{aligned}$$

である。

(答) $y = -9x$

(3)



$y = f'(x)$ と $y = -9x$ の交点の x 座標を小さいほうから α 、 β とすると、求める面積は上図斜線部の面積である。ここで、

$$3x^2 + 6x - 9 = -9x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

より、 $\alpha = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$ 、 $\beta = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} - \frac{-5 - \sqrt{37}}{2} \\ &= \sqrt{37} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (-9x - 3x^2 - 6x + 9) dx &= -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{37\sqrt{37}}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{37\sqrt{37}}{2}$

(1)

第 n 群には n 個の項が存在することから、第 n 群までの項の数の和は

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

である。ここで、第 20 項目が第 n 群にあるとき、

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 20 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n < 40 \leq n(n+1)$$

が成り立つ。 $5 \cdot 6 = 30$, $6 \cdot 7 = 42$ より、不等式が成り立つのは $n = 6$ の場合であり、第 5 群までの項の数の和が

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$$

であることから、第 20 項目は第 6 群の 5 番目である。

以上より、求める数は $\frac{5}{7}$ である。

(答) $\frac{5}{7}$

(2)

$\frac{7}{10}$ は、第 9 群の 7 番目の数である。ここで、第 8 群までの項の数の和は

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36$$

であるから、 $36 + 7 = 43$ より、 $\frac{7}{10}$ は第 43 項目の数である。

(答) 第 43 項目

(3)

第 n 群にあるすべての数の分子の和は

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であるから、求める和は

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n+1} = \frac{n}{2}$$

である。

(答) $\frac{n}{2}$

(4)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} = \frac{1}{4}n(n+1)$$

である。

(答) $\frac{1}{4}n(n+1)$

(5)

初項から第 n 項までの和がはじめて 20 を超えるとき、第 n 項が第 m 群にあると仮定すると、

$$S_{m-1} \leq 20 < S_m$$

が成り立つ。この不等式を変形すると、

$$\frac{1}{4}(m-1)m \leq 20 < \frac{1}{4}m(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m-1)m \leq 80 < m(m+1)$$

となる。 $8 \cdot 9 = 72$, $9 \cdot 10 = 90$ であるから、これを満たす整数 m は 9 である。

(答) 第 9 群

3

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \\ &= (1-k)\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (1-k)\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$$

(2)

点Eは線分BC上にあるので、 $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{2}{3}t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

とかける。(tは実数)

また点EはOD上の点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= s\overrightarrow{OD} \\ &= s(1-k)\overrightarrow{a} + sk\overrightarrow{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

とかける。(sは実数)

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は互いに一次独立であるから、①、②より

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{2}{3}t = s(1-k) \\ 1-t = sk \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3-3k}{3-k} \\ s = \frac{2}{3-k} \end{cases} \quad (\because 0 < k < 1 \text{ より } 3-k \neq 0)\end{aligned}$$

である。よって、 $\overrightarrow{OE} = \frac{2-2k}{3-k}\overrightarrow{a} + \frac{2k}{3-k}\overrightarrow{b}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{2-2k}{3-k}\overrightarrow{a} + \frac{2k}{3-k}\overrightarrow{b}$$

(3)

$\angle AOB = 120^\circ$, $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 5$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{15}{2}\end{aligned}$$

である。 $\angle OEB = 90^\circ$ のとき、 $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ より,

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{2(1-k)}{3-k}\overrightarrow{a} + \frac{2k}{3-k}\overrightarrow{b} \right\} \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(1-k)}{3-k} \cdot \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{a}|^2 - \frac{2k}{3-k} |\overrightarrow{b}|^2 + \left\{ -\frac{2(1-k)}{3-k} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2k}{3-k} \right\} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(1-k)}{3-k} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3^2 - \frac{2k}{3-k} 5^2 + \left\{ -\frac{2(1-k)}{3-k} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2k}{3-k} \right\} \left(-\frac{15}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12(1-k) - 50k + 15(1-k) - 10k &= 0 \\ \Leftrightarrow 27 = 87k \\ \Leftrightarrow k = \frac{9}{29}\end{aligned}$$

となる。これは $0 < k < 1$ を満たす。以上より $k = \frac{9}{29}$ である。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{9}{29}$$

(1)

$f(x) = |x^2 - (2a-1)x + a^2 - a| + |x^3 - ax^2 - (8a^2 + 5a + 1)x + 12a^3 + 10a^2 + 2a|$ より, $f(x) = 0$ のとき

$$x^2 - (2a-1)x + a^2 - a = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

かつ

$$x^3 - ax^2 - (8a^2 + 5a + 1)x + 12a^3 + 10a^2 + 2a = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ必要がある。ここで, 方程式①を解くと,

$$x^2 - (2a-1)x + a(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)\{x-(a-1)\} = 0$$

$$\therefore x = a, a-1$$

となるから, ①, ②を同時に満たす x は a と $a-1$ 以外に存在しない。以上より, $f(x) = 0$ の相異なる解は高々 2 個である。

(証明終)

(2)

$x = a$ と $x = a-1$ が双方とも②を満たせばよい。②に $x = a$ を代入すると,

$$a^3 - a^3 - a(8a^2 + 5a + 1) + 12a^3 + 10a^2 + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 + 5a^2 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(4a+1)(a+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -1, -\frac{1}{4}, 0$$

である。また, $x = a-1$ を代入すると,

$$(a-1)^3 - a(a-1)^2 - (a-1)(8a^2 + 5a + 1) + 12a^3 + 10a^2 + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3a^2 + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a+1)(a+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2, -1, 0$$

である。以上より, 求める a の値は $0, -1$ であり, このときの解はそれぞれ $x = 0, -1$, $x = -1, -2$ である。

(答) $a = 0$ (解は $x = 0, -1$), $a = -1$ (解は $x = -1, -2$)

(3)

$x = a$ と $x = a-1$ のいずれか一方のみが②を満たせばよい。(2)の結果より, とりうる a の値は

$$a = -\frac{1}{4} \quad (x = a \text{ が } \textcircled{2} \text{ を満たし, } x = a-1 \text{ が } \textcircled{2} \text{ を満たさない})$$

または,

$$a = -2 \quad (x = a-1 \text{ が } \textcircled{2} \text{ を満たし, } x = a \text{ が } \textcircled{2} \text{ を満たさない})$$

であり, 対応する解はそれぞれ $x = -\frac{1}{4}$, $x = -3$ である。

(答) $a = -\frac{1}{4}$ (解は $x = -\frac{1}{4}$), $a = -2$ (解は $x = -3$)