

(1)

$f(x) = |x^2 - (2a-1)x + a^2 - a| + |x^3 - ax^2 - (8a^2 + 5a + 1)x + 12a^3 + 10a^2 + 2a|$ より, $f(x) = 0$ のとき

$$x^2 - (2a-1)x + a^2 - a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

かつ

$$x^3 - ax^2 - (8a^2 + 5a + 1)x + 12a^3 + 10a^2 + 2a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ必要がある。ここで, 方程式①を解くと,

$$x^2 - (2a-1)x + a(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)\{x-(a-1)\} = 0$$

$$\therefore x = a, a-1$$

となるから, ①, ②を同時に満たす x は a と $a-1$ 以外に存在しない。以上より, $f(x) = 0$ の異なる解は高々 2 個である。

(証明終)

(2)

$x = a$ と $x = a-1$ が双方とも②を満たせばよい。②に $x = a$ を代入すると,

$$a^3 - a^3 - a(8a^2 + 5a + 1) + 12a^3 + 10a^2 + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 + 5a^2 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(4a+1)(a+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -1, -\frac{1}{4}, 0$$

である。また, $x = a-1$ を代入すると,

$$(a-1)^3 - a(a-1)^2 - (a-1)(8a^2 + 5a + 1) + 12a^3 + 10a^2 + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3a^2 + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a+1)(a+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2, -1, 0$$

である。以上より, 求める a の値は $0, -1$ であり, このときの解はそれぞれ $x = 0, -1$, $x = -1, -2$ である。

(答) $a = 0$ (解は $x = 0, -1$), $a = -1$ (解は $x = -1, -2$)

(3)

$x = a$ と $x = a-1$ のいずれか一方のみが②を満たせばよい。(2)の結果より, とりうる a の値は

$$a = -\frac{1}{4} \quad (x = a \text{ が } \textcircled{2} \text{ を満たし, } x = a-1 \text{ が } \textcircled{2} \text{ を満たさない})$$

または,

$$a = -2 \quad (x = a-1 \text{ が } \textcircled{2} \text{ を満たし, } x = a \text{ が } \textcircled{2} \text{ を満たさない})$$

であり, 対応する解はそれぞれ $x = -\frac{1}{4}$, $x = -3$ である。

(答) $a = -\frac{1}{4}$ (解は $x = -\frac{1}{4}$), $a = -2$ (解は $x = -3$)

(1)

$$\begin{aligned} f(\pi-x) &= \frac{\pi \sin(\pi-x)}{(\pi-x)\{\pi-(\pi-x)\}} \\ &= \frac{\pi \sin x}{(\pi-x)x} \quad (\because \sin(\pi-x) = \sin x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

より、 $f(\pi-x) = f(x)$ は示された。

(証明終)

(2)

$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ のとき、 $0 < \sin x \leq 1$ より

$$0 < \frac{\sin x}{x}$$

が成り立つ。また、 $g(x) = 2x - \pi \sin x$ とおくと、

$$g'(x) = 2 - \pi \cos x \geq 2 \quad (\because \cos x \leq 0)$$

より $g(x)$ は単調増加であるから、

$$g(x) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\therefore 2x - \pi \sin x \geq 0$$

$$\therefore \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi}$$

である。以上より、

$$0 < \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi}$$

が示された。

(証明終)

(3)

$n \geq 1$ より、 $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2} < \pi - \frac{1}{n} < \pi$ であることに注意する。このとき、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ より

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx &< \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ \therefore [\sin x]_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} &< \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 - \sin \frac{1}{n} < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。一方、 $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ のとき、 $0 < \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi}$ より

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}} 0 dx < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{2}{\pi} dx$$

$$\therefore 0 < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2}{\pi} \left(\pi - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} \right) = 1 - \frac{2}{\pi n} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。以上①、②、③より、

$$1 - \sin \frac{1}{n} < I_n < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + 1 - \frac{2}{\pi n}$$

$$\therefore 1 - \sin \frac{1}{n} \leq I_n < 1 + \frac{\pi}{2}$$

が示された。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi \sin x}{x(\pi-x)} \\ &= \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{\pi-x} \\ &= \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} \quad (\because \sin x = \sin(\pi-x)) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} dx$$

である。右辺第2項について、 $t = \pi - x$ とおくと $\frac{dt}{dx} = -1$ であり、 t は下表のように変化する。

x	$\frac{1}{n}$	$\rightarrow$	$\pi - \frac{1}{n}$
t	$\pi - \frac{1}{n}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{n}$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} f(x) dx &= \int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{t} (-dt) \\ &= 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= 2I_n \end{aligned}$$

である。

(答) $2I_n$

(5)

$$\begin{aligned} 2I_n &= \int_{\frac{1}{n}}^{\pi-\frac{1}{n}} f(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}} f(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{n}} f(\pi-t) (-dt) \\ &= 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \end{aligned}$$

であるから、

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = I_n$$

である。(3)の結果より $1 - \sin \frac{1}{n} \leq I_n < 1 + \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$1 - \sin \frac{1}{n} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < 1 + \frac{\pi}{2}$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq 1 + \frac{\pi}{2} < 1 + \frac{4}{2}$$

$$\therefore 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < 3$$

となる。よって、 $1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < 3$ が示された。

(証明終)

(1)

 $f(x) = px^2 + qx + r$ とおく。 (p, q, r は実数で $p \neq 0$)

$$\begin{cases} f(x+1) = p(x+1)^2 + q(x+1) + r \\ f(x+2) = p(x+2)^2 + q(x+2) + r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x+1) = px^2 + (2p+q)x + p+q+r \\ f(x+2) = px^2 + (4p+q)x + 4p+2q+r \end{cases}$$

となるので、

$$f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = 2px^2 + (-6p+2q)x - p - 3q + 2r$$

である。これが $2x^2$ となるから、

$$\begin{cases} 2p = 2 \\ -6p + 2q = 0 \\ -p - 3q + 2r = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 3 \\ r = 5 \end{cases}$$

より、 $f(x) = x^2 + 3x + 5$ となる。

(答) $f(x) = x^2 + 3x + 5$

(2)

 $b_n = a_n - f(n)$ とおく と、

 $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2n^2$ より

$$(b_{n+2} + f(n+2)) - 5(b_{n+1} + f(n+1)) + 6(b_n + f(n)) = 2n^2$$

$$\therefore b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0 \quad (\because f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 2n^2)$$

である。したがって b_n は

$$\begin{cases} b_{n+2} - 2b_{n+1} = 3(b_{n+1} - 2b_n) & \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+2} - 3b_{n+1} = 2(b_{n+1} - 3b_n) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

を満たす。①の左辺を c_{n+1} とおけば $c_{n+1} = 3c_n$ であり、また

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - 2b_1 \\ &= (a_2 - f(2)) - 2(a_1 - f(1)) \\ &= (48 - 15) - 2(18 - 9) \\ &= 15 \end{aligned}$$

であるから

$$c_n = 5 \cdot 3^n$$

である。さらに、②の左辺を d_{n+1} とおけば $d_{n+1} = 2d_n$ であり、また

$$\begin{aligned} d_1 &= b_2 - 3b_1 \\ &= (a_2 - f(2)) - 3(a_1 - f(1)) \\ &= (48 - 15) - 3(18 - 9) \\ &= 6 \end{aligned}$$

であるから

$$d_n = 3 \cdot 2^n$$

である。以上より

$$\begin{aligned} b_n &= c_n - d_n \\ &= 5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

である。

(答) $b_n = 5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$

(3)

$$\begin{aligned} a_n &= b_n + f(n) \\ &= 5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n + n^2 + 3n + 5 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = 5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n + n^2 + 3n + 5$

(4)

まず $n \geq 5$ で $n^2 > 2n+1$ となることを示す。

$$n^2 - (2n+1) = (n-1)^2 - 2 \geq (5-1)^2 - 2 = 14$$

よって $n^2 > 2n+1$ は成り立つ。 $\cdots \textcircled{3}$

次に $n \geq 5$ で $n^2 < 2^n$ となることを帰納法で示す。

[1] $n=5$ のとき

$$n^2 = 25, \quad 2^n = 32$$

より $n^2 < 2^n$ を満たす。

[2] $n=k$ ($k \geq 5$) のとき

$k^2 < 2^k$ が成り立つと仮定して $(k+1)^2 < 2^{k+1}$ も成り立つことを示す。このとき

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - (k+1)^2 &> 2k^2 - (k+1)^2 \quad (\because k^2 < 2^k) \\ &= k^2 - 2k - 1 \\ &= (k-1)^2 - 2 \geq 14 \end{aligned}$$

より $(k+1)^2 < 2^{k+1}$ も成り立つ。

以上[1],[2]より帰納法は完結し、 $n \geq 5$ で $2n+1 < n^2 < 2^n$ が示された。

(証明終)

(5)

$$\frac{a_n}{3^n} = 5 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{n^2}{3^n} + 3 \cdot \frac{n}{3^n} + \frac{5}{3^n}$$

である。(4)より、 $n \geq 5$ のとき $0 < n^2 < 2^n$ であるから、

$$0 < \frac{n^2}{3^n} < \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

が成り立つ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$ より、はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ である。

また $n \geq 5$ のとき、 $n(n-1) > 0 \Leftrightarrow n^2 > n$ であるから、

$$0 < \frac{n}{3^n} < \frac{n^2}{3^n}$$

である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ より、はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$ である。

以上より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} = 5$ である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} = 5$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{である。}$$

(1)

$$\begin{aligned} X^2 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} \\ &= (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (bc - ad) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (a+d)X + (bc - ad)E \end{aligned}$$

となるが、 a, b, c, d は整数なので $a+d, bc-ad$ も整数であるから、 X^2 は X の整数倍と E の整数倍の和で書ける。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

問題文より

$$(i) X^2 = Y^2$$

$$(ii) XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。(i)の両辺に右から Y をかけると

$$X^2Y = Y^3$$

$$\Leftrightarrow Y^3 = X \left\{ YX + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\because (ii))$$

$$\Leftrightarrow Y^3 = XYX + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \quad \dots\dots ①$$

となる。(i)の両辺に左から Y をかけると

$$YX^2 = Y^3$$

$$\Leftrightarrow Y^3 = \left\{ XY - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} X \quad (\because (ii))$$

$$\Leftrightarrow Y^3 = XYX - \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ②$$

となる。①, ②より

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 2c \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ c = 0 \end{cases}$$

であるから $a+d=0$ である。

 $\dots\dots ③$

同様に(i)の両辺に左から X をかけると

$$X^3 = XY^2$$

$$\Leftrightarrow X^3 = \left\{ YX + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} Y$$

$$\Leftrightarrow X^3 = YXY + \begin{pmatrix} 2r & 2s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ④$$

となる。(i)の両辺に右から X をかけると

$$X^3 = Y^2X$$

$$\Leftrightarrow X^3 = Y \left\{ XY - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$X^3 = YXY - \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 0 & 2r \end{pmatrix} \quad \dots\dots ⑤$$

となる。④, ⑤より

$$\begin{pmatrix} 2r & 2s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 0 & 2r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -p \\ r = 0 \end{cases}$$

であるから $p+s=0$ である。

 $\dots\dots ⑥$

以上③, ⑥より $a+d=0$ かつ $p+s=0$ である。よって題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)より

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & -p \end{pmatrix}$$

である。いま問題文より X は対角行列であるから $b=0$ である。すると

$$\begin{cases} X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \\ Y^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

より(i)から $p^2 = a^2$

$$\therefore p = \pm a \quad \dots\dots ⑦$$

である。また

$$\begin{aligned} XY - YX &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & -p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap & aq \\ 0 & ap \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ap & -aq \\ 0 & ap \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & aq \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるが、(ii)よりこれが $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるから、

$$aq = 1$$

である。 a, q は整数でありかつ $a > 0$ なので、

$$\begin{cases} a = 1 \\ q = 1 \end{cases} \quad \dots\dots ⑧$$

となる。以上⑦, ⑧より、

$$(X, Y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である。

$$(\text{答}) (X, Y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$