

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

試験時間 120 分

理学部(理学科・応用理学科)

問題冊子 問題…… 1 ～ 4 ページ…… 1 ～ 2
解答用紙…… 4 枚
下書用紙…… 1 枚

配点…表示のとおり。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に、問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお、解答用紙には、必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは、切り離さないこと。
6. 配布された解答用紙は、持ち帰らないこと。
7. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後、指示があるまでは退室しないこと。

1 実数 a に対して関数

$$f(x) = |x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a| + |x^3 - ax^2 - (8a^2 + 5a + 1)x + 12a^3 + 10a^2 + 2a|$$

を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ の相異なる解は高々 2 個であることを示せ。
- (2) $f(x) = 0$ の相異なる解がちょうど 2 個となるときの a の値とそのときの解を求めよ。
- (3) $f(x) = 0$ の相異なる解がちょうど 1 個となるときの a の値とそのときの解を求めよ。

(100 点)

2 開区間 $(0, \pi)$ で定義された連続関数 $f(x) = \frac{\pi \sin x}{x(\pi - x)}$ を考える。自然数 n に対して、

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x} dx \text{ とおくとき、次の問いに答えよ。}$$

- (1) $f(x) = f(\pi - x)$ を示せ。
- (2) $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ のとき、 $0 < \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi}$ となることを示せ。
- (3) $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ となることを用いて、不等式

$$1 - \sin \frac{1}{n} \leq I_n < 1 + \frac{\pi}{2}$$
 を示せ。
- (4) 自然数 n に対して、 $\int_{\frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} f(x) dx$ を I_n を用いて表せ。
- (5) 不等式 $1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < 3$ を示せ。

(100 点)

3 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 18, a_2 = 48, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2n^2$$

をみたすとき、次の問いに答えよ。

- (1) x の 2 次式 $f(x)$ で、

$$f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = 2x^2$$

をみたすものを求めよ。

- (2) $b_n = a_n - f(n)$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (4) $n \geq 5$ のとき、 $2n+1 < n^2 < 2^n$ を数学的帰納法で示せ。

- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n}$ を求めよ。

(100 点)

4 整数を成分に持つ 2 次の正方行列

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

が条件

(i) $X^2 = Y^2$

(ii) $XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

をみたすとき、次の問いに答えよ。

- (1) X^2 は X の整数倍と単位行列 E の整数倍の和で書けることを示せ。

- (2) $a+d=0$ かつ $p+s=0$ であることを示せ。

- (3) これらの関係式をみたす行列 X, Y で、 X が対角行列でありかつ $a > 0$ であるものをすべて求めよ。

(100 点)