

[1]

(1)

$X = \log_3 x$, $Y = \log_3 y$ とおくと, $x \geq 3$, $y \geq 3$ より

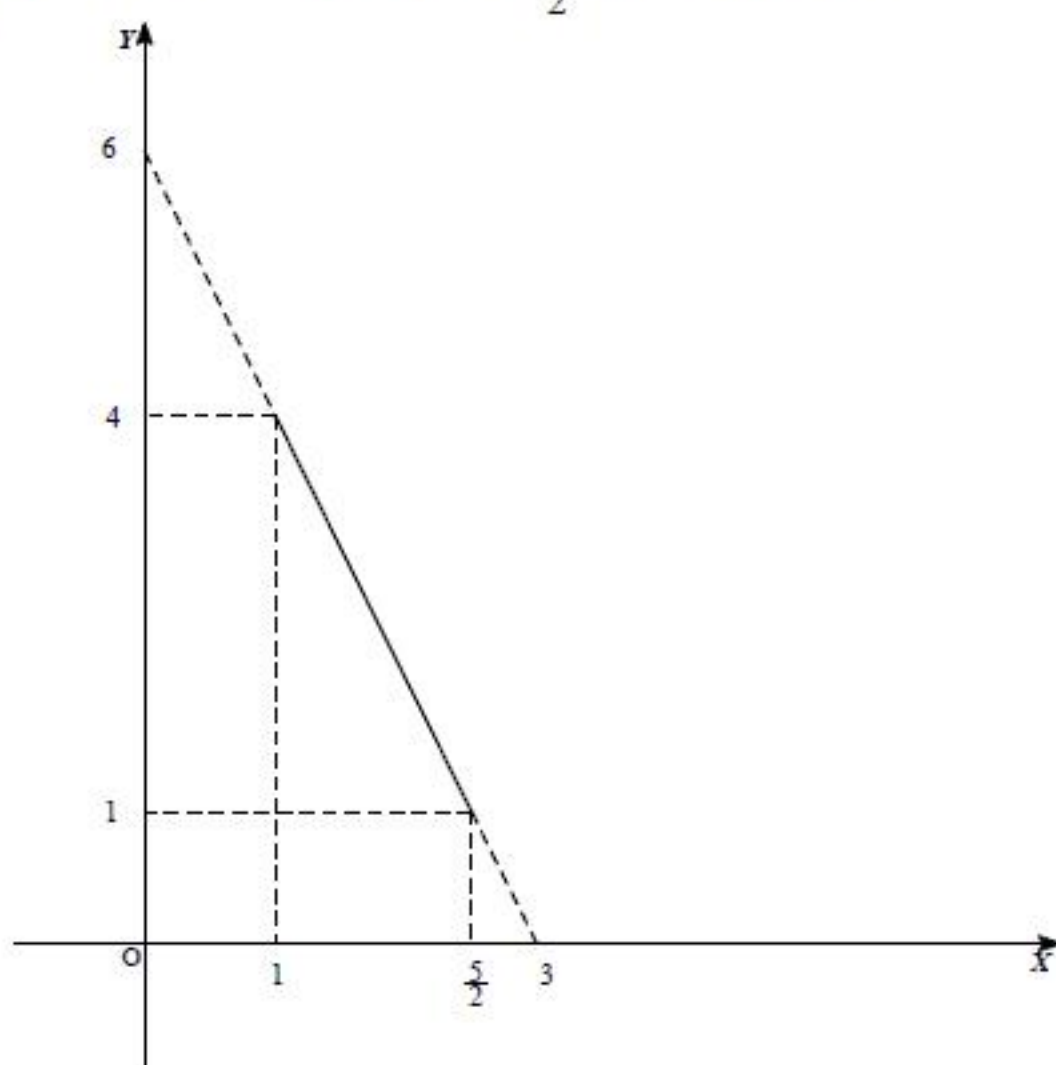
$$X \geq 1, Y \geq 1$$

$x^2 y = 3^6$ より

$$2X + Y = 6$$

グラフより

$$1 \leq X \leq \frac{5}{2}, 1 \leq Y \leq 4 \quad \therefore 1 \leq \log_3 x \leq \frac{5}{2}, 1 \leq \log_3 y \leq 4$$



$$(\text{答}) 1 \leq \log_3 x \leq \frac{5}{2}, 1 \leq \log_3 y \leq 4$$

(2)

$$\log_3 x - \log_9 y = \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 y = X - \frac{1}{2} Y = k \text{ とおく。}$$

(1)より, $Y = 6 - 2X$ なので

$$\begin{aligned} k &= X - \frac{1}{2}(6 - 2X) \\ &= 2X - 3 \end{aligned}$$

$1 \leq X \leq \frac{5}{2}$ より, k は $X = \frac{5}{2}$ のとき最大値 2 を, $X = 1$ のとき最小値 -1 をとる。

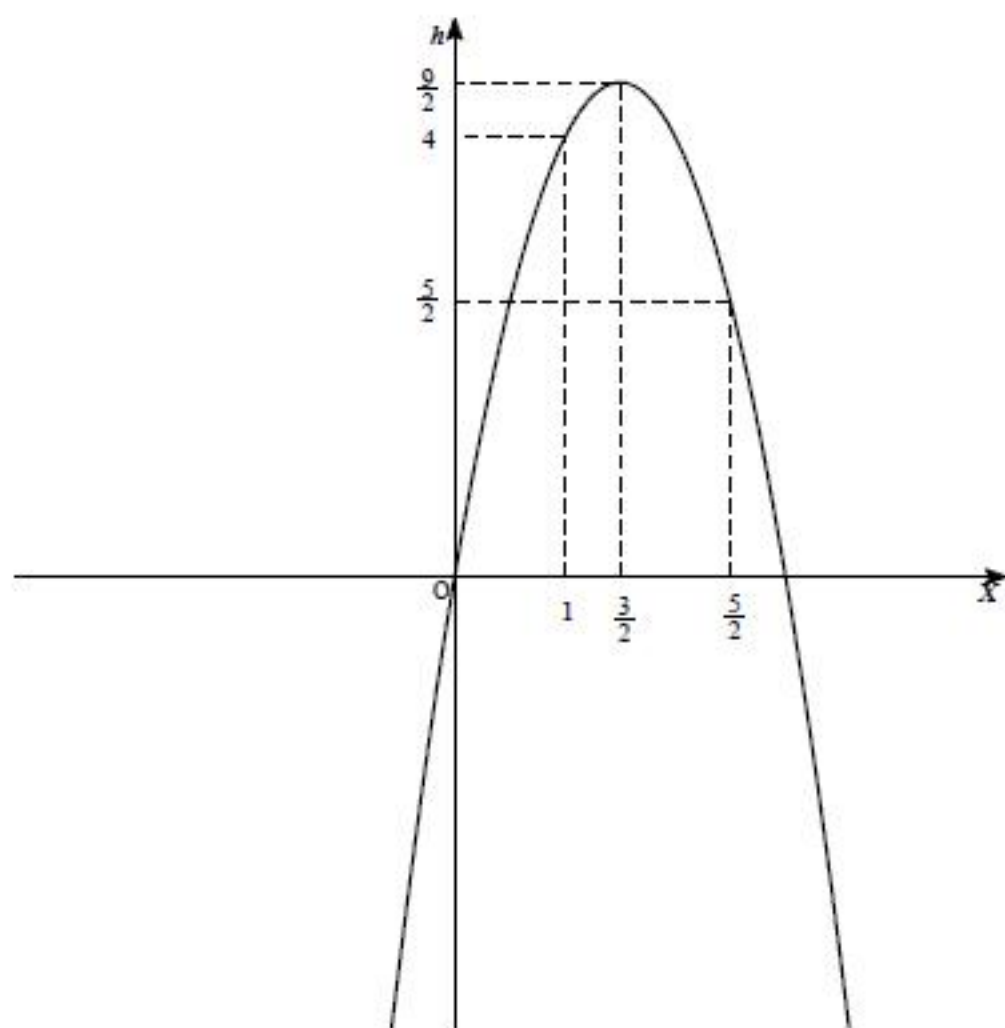
$$(\text{答}) \text{ 最大値: } 2, \text{ 最小値: } -1$$

(3)

$(\log_3 x)(\log_3 y) = XY = h$ とおくと, (1)より, $Y = 6 - 2X$ なので

$$\begin{aligned} h &= X(6 - 2X) \\ &= -2X^2 + 6X \\ &= -2\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$1 \leq X \leq \frac{5}{2}$ より, グラフから, h は $X = \frac{3}{2}$ のとき最大値は $\frac{9}{2}$, $X = \frac{5}{2}$ のとき最小値 $\frac{5}{2}$ をとる。



$$(\text{答}) \text{ 最大値: } \frac{9}{2}, \text{ 最小値: } \frac{5}{2}$$

(4)同様に, (1)より, $Y = 6 - 2X$ なので

$$\begin{aligned} \log_3 x^m + \log_3 y^n &= m \log_3 x + n \log_3 y \\ &= mX + nY \\ &= mX + n(6 - 2X) \\ &= (m - 2n)X + 6n \end{aligned}$$

これが $X = \log_3 x$ の値に依らない定数であれば最大値と最小値は等しくなるので,

$$m = 2n$$

$$(\text{答}) m = 2n$$

[2]

(1)

(i) $x \geq 0$ のとき

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad \therefore f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

(ii) $x < 0$ のとき

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x \quad \therefore f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

$$(\text{答}) \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 (x > 0), \quad f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 (x < 0)$$

(2)

(i) $x \geq 0$ のとき

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \frac{1}{3}$$

(ii) $x < 0$ のとき

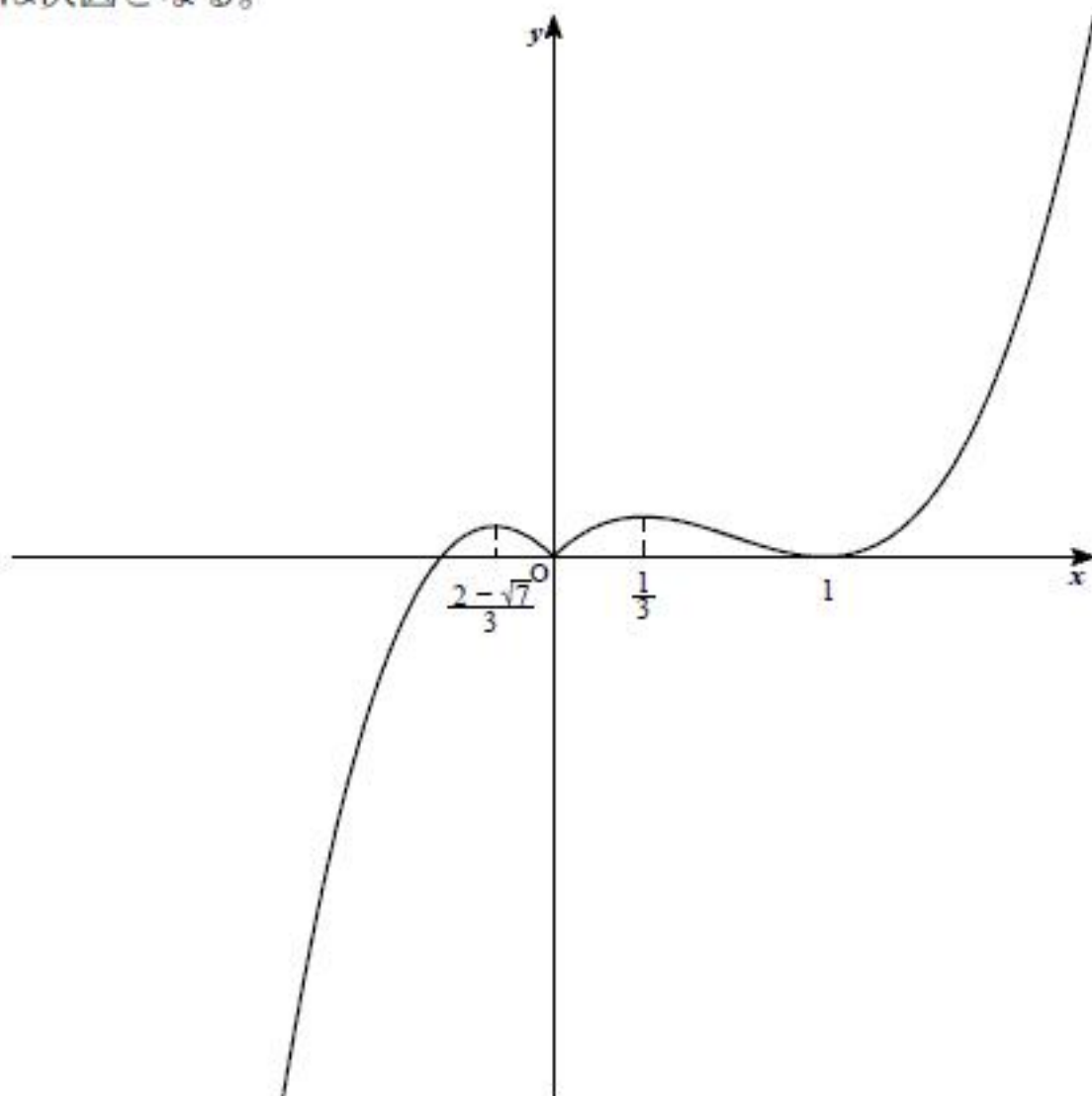
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$f(0) = 0$ に注意すると、増減表は次図となる。

x	...	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$	...	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-		+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{14\sqrt{7}-34}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よってグラフは次図となる。



(3)

共有点の x 座標は

(i) $x \geq 0$ のとき

$$ax = x^3 - 2x^2 + x \Leftrightarrow x \{ x^2 - 2x + (1-a) \} = 0 \quad \therefore x = 0, 1 \pm \sqrt{a}$$

$a \geq 1$ に注意すると、 $x \geq 0$ より

$$\therefore x = 0, 1 + \sqrt{a}$$

(ii) $x < 0$ のとき

$$ax = x^3 - 2x^2 - x \Leftrightarrow x \{ x^2 - 2x - (1+a) \} = 0 \quad \therefore x = 0, 1 \pm \sqrt{a+2}$$

$a \geq 1$ に注意すると、 $x < 0$ より

$$\therefore x = 1 - \sqrt{a+2}$$

以上から、異なる 3 つの共有点を持つことが示せた。

(証明終)

(4)

求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{ x - (x^3 - 2x^2 + x) \} dx &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(答) $\frac{4}{3}$

[3]

(1)

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} &= 3\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= 3\overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

ここで、 $\triangle ABC$ が正三角形より、 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ であることを用いた。
よって、与式は示された。

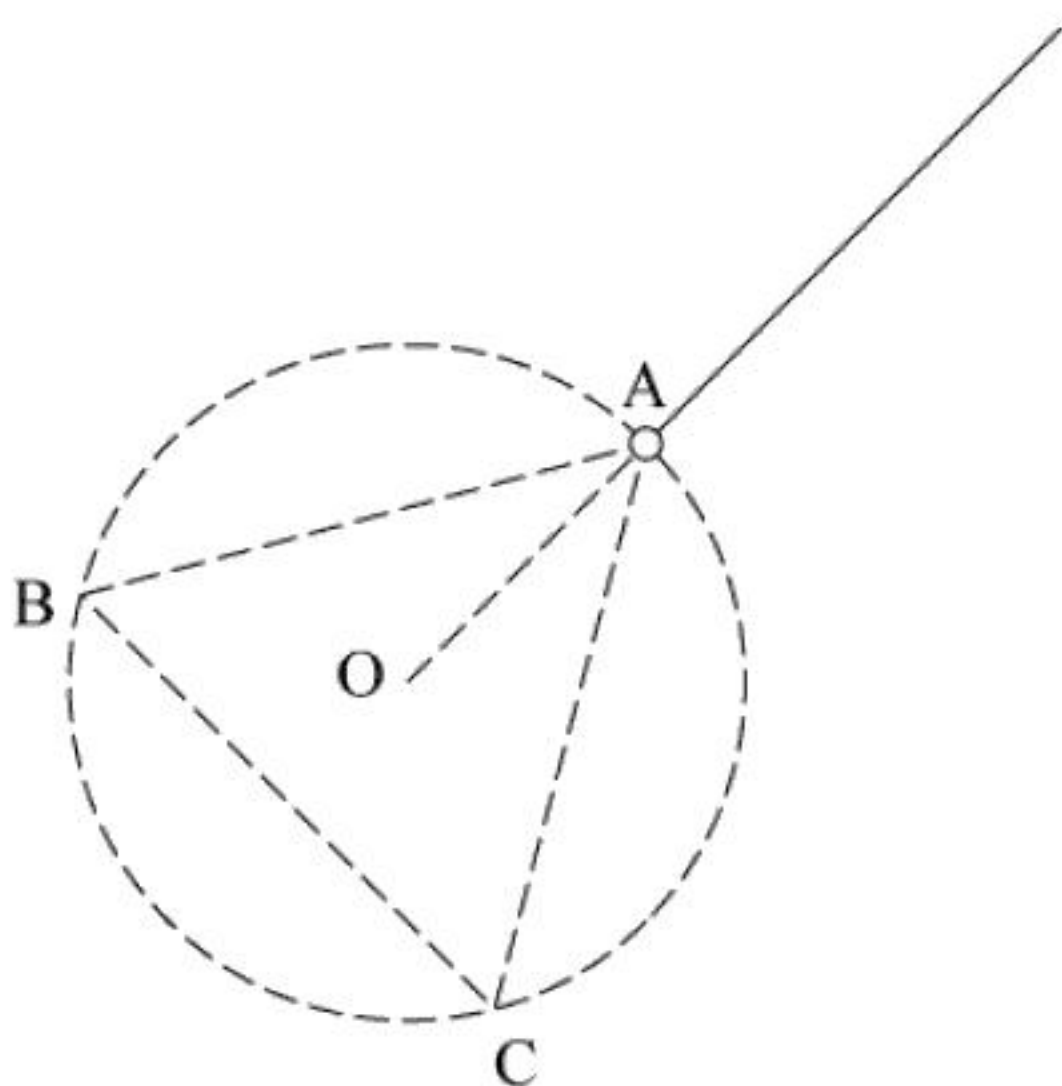
(2)

$$x \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow x (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OP}$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{x}{x-1} \overrightarrow{OA}$$

$x > 1$ のとき $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} > 1$ だから、 $\frac{x}{x-1}$ は x を $x > 1$ で変化させたとき 1 より大きい全実数を取り得る。したがって、求める図形は、 O を起点として A を通る半直線のうち線分 OA を除く部分、すなわち次図の実線部分になる。



(3)

$$OA = OB = 1, \quad \angle AOB = 120^\circ \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad |\overrightarrow{OA}|^2 = 1$$

である。これより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{x-1} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{x-1} (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) - \frac{1}{x-1} |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x-1} \\ &= -\frac{3}{2(x-1)} \\ \therefore -\frac{3}{2(x-1)} &= -2 \quad \therefore x = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

(答) $x = \frac{7}{4}$

4

(1)

直線 $x=1$, $x=2$ 上に存在する格子点の個数を数える。

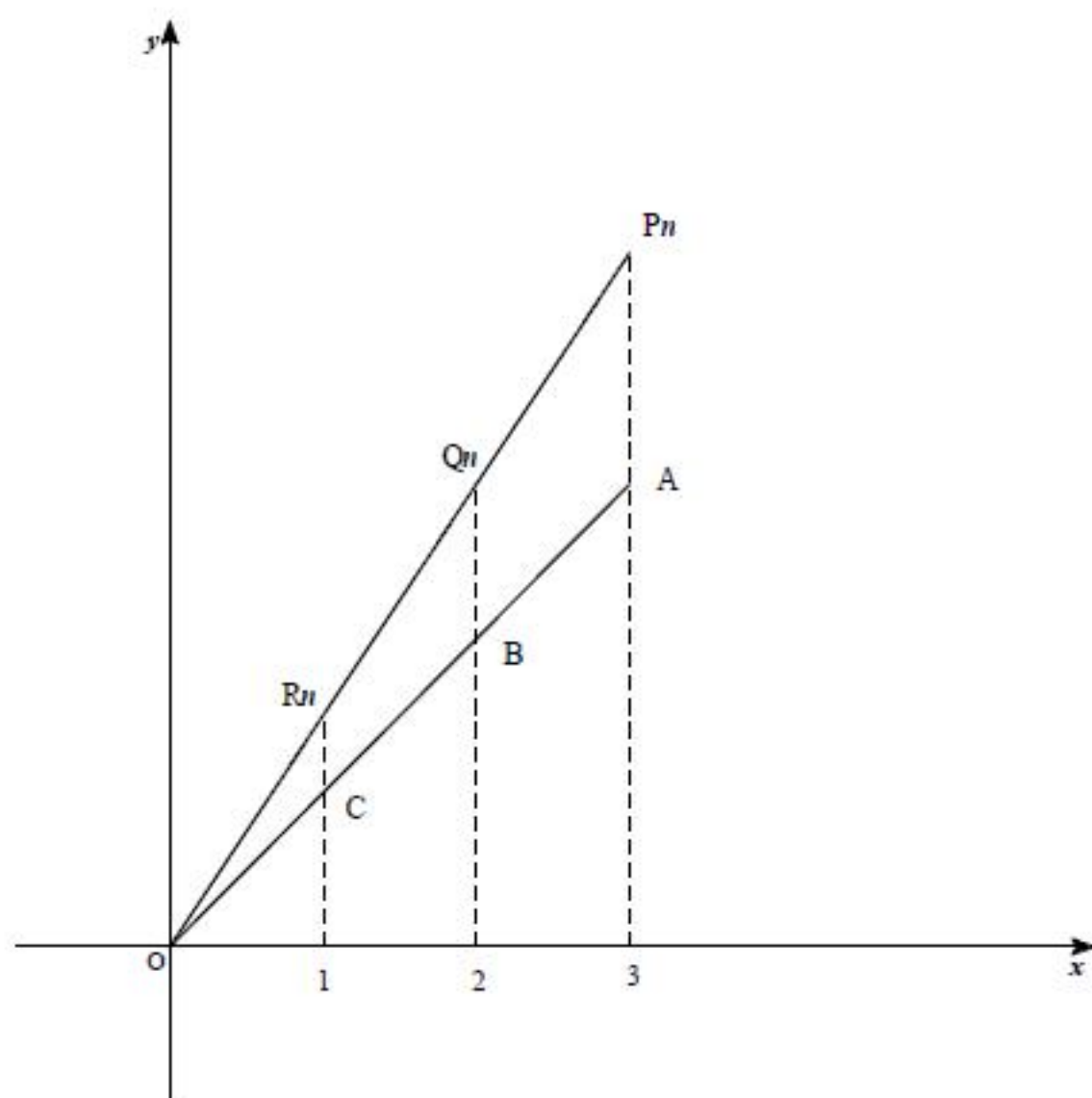
OA と $x=2$ との交点を B , $x=1$ との交点を C とし,

OP_n と $x=2$ との交点を Q_n , $x=1$ との交点を R_n とする。

各点の座標は

$$B:(2,2), C:(1,1), Q_n:\left(2, \frac{2}{3}n\right), R_n:\left(1, \frac{1}{3}n\right)$$

である。



$\langle x \rangle$ を x より小さい最大の整数を表すとする

$$a_n = \left\langle \frac{n}{3} - 1 \right\rangle + \left\langle \frac{2}{3}n - 2 \right\rangle$$

よって

$$a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 1$$

(答) $a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 1$

(2)

・ $n = 3k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3k+1} &= \left\langle k + \frac{1}{3} - 1 \right\rangle + \left\langle 2k + \frac{2}{3} - 2 \right\rangle \\ &= k - 1 + (2k - 2) = 3k - 3 \end{aligned}$$

・ $n = 3k + 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3k+2} &= \left\langle k + \frac{2}{3} - 1 \right\rangle + \left\langle 2k + \frac{4}{3} - 2 \right\rangle \\ &= k - 1 + (2k - 1) = 3k - 2 \end{aligned}$$

・ $n = 3k + 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3k+3} &= \langle k + 1 - 1 \rangle + \langle 2k + 2 - 2 \rangle \\ &= k - 1 + (2k - 1) = 3k - 2 \end{aligned}$$

(答) $a_{3k+1} = 3k - 3, a_{3k+2} = 3k - 2, a_{3k+3} = 3k - 2$

(3)

(2)より, 1 以上の整数 k を用いて, $n = 3k + 2$ と表せるとき。

(答) $n = 3k + 2 (k = 1, 2, \dots)$

(4)

(2)より $k = 8$ のとき, $a_n = 22$ となることがあり, a_n が最大となる。

$\therefore n = 26, 27$

(答) $n = 26, 27$