

1

(1)

$$y = \frac{3^6}{x^2} \geq 3$$

より

$$3 \leq x \leq 3^{\frac{5}{2}}$$

$$\therefore 1 \leq \log_3 x \leq \frac{5}{2}$$

また、同様に考えて

$$x^2 = \frac{3^6}{y} \geq 3^2$$

より

$$3 \leq y \leq 3^4$$

$$\therefore 1 \leq \log_3 y \leq 4$$

$$(\text{答}) \quad 1 \leq \log_3 x \leq \frac{5}{2}, \quad 1 \leq \log_3 y \leq 4$$

(2)

$$\log_3 x - \log_9 y = \log_3 x - \frac{\log_3 y}{\log_3 9}$$

$$= \log_3 x - \log_3 \sqrt{y}$$

$$= \log_3 \frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$= \log_3 \frac{x^2}{3^3}$$

$$= 2\log_3 x - 3$$

となる。 $1 \leq \log_3 x \leq \frac{5}{2}$ より、最大値は

$$2 \times \frac{5}{2} - 3 = 2$$

最小値は

$$2 \times 1 - 3 = -1$$

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } 2, \text{ 最小値 } -1$$

(3)

$$\log_3 y = \log_3 \frac{3^6}{x^2}$$

$$= 6 - 2\log_3 x$$

であるから

$$(\log_3 x)(\log_3 y) = \log_3 x(6 - 2\log_3 x)$$

である。よって $\log_3 x = t$ とおくと

$$1 \leq t \leq \frac{5}{2}$$

となり

$$(\log_3 x)(\log_3 y) = t(6 - 2t)$$

$$= -2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

であるから、最大値は $t = \frac{3}{2}$ のときで $\frac{9}{2}$ 、最小値は $t = \frac{5}{2}$ のときで

$$-2\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \frac{9}{2}, \text{ 最小値 } \frac{5}{2}$$

(4)

$$\log_3 x^m + \log_3 y^n = m\log_3 x + n(6 - 2\log_3 x)$$

$$= (m - 2n)\log_3 x + 6n$$

となる。これが $1 \leq \log_3 x \leq \frac{5}{2}$ において最大値と最小値が等しくなるには、

$$m - 2n = 0$$

が成り立てばよい。

$$(\text{答}) \quad m - 2n = 0$$

2

(1)

$$x^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(\theta) - g(\theta) &= 2 \sin 2\theta - 2(\sin \theta + \cos \theta) + 1 \\ &= 2(x^2 - 1) - 2x + 1 \\ &= 2x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad f(\theta) - g(\theta) = 2x^2 - 2x - 1$$

(2)

$$x = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

なので、 x のとりうる範囲は $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ である。

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

より、解の公式を用いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

これは $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ を満たす。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

(3)

$$\sin \theta + \cos \theta = x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

となる θ のとき

$$f(\theta) - g(\theta) = 0$$

すなわち

$$f(\theta) = g(\theta)$$

となる。

$$[1] \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{のとき}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

に

$$\cos \theta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \sin \theta$$

を代入して、

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \sin \theta \right)^2 = 1$$

$$2 \sin^2 \theta - (1 + \sqrt{3}) \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$2 \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

このとき、

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$$

したがって、考えられるのは

$$(\sin \theta, \cos \theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

であるから

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$$

$$[2] \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{のとき}$$

[1] と同様に考えると

$$(\sin \theta, \cos \theta) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

であるから

$$\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

以上 [1], [2] より、

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

(4)

$$2x^2 - 2x - 1 = 2 \left(x - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)$$

であるから

$$x \leq \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \leq x$$

のとき、

$$f(\theta) - g(\theta) = 2x^2 - 2x - 1 \geq 0$$

となり、 $f(\theta) \geq g(\theta)$ となる。ここで

$$y = x - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \sin \theta + \cos \theta - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

の増減を考えると

$$y' = \cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

より次の増減表を得る。

θ	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	2π
y'		+	+	+	0	-	-	-	0	+	
y		↗	0	↗	極大	↘	0	↘	極小	↗	

$$\theta = 0, 2\pi \quad \text{のとき} \quad y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < 0 \quad \text{なので、}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\text{のとき} \quad y \geq 0, \quad \text{つまり} \quad \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \leq x \quad \text{となる。}$$

同様に考えて

$$y = x - \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \sin \theta + \cos \theta - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

の増減を考えると

$$y' = \cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

より次の増減表を得る。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
y'		+	0	-	-	-	0	+	+	+	
y		↗	極大	↘	0	↘	極小	↗	0	↗	

$$\theta = 0, 2\pi \quad \text{のとき} \quad y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 0 \quad \text{なので、}$$

$$\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{のとき} \quad y \leq 0, \quad \text{つまり} \quad x \leq \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{となる。}$$

以上より $f(\theta) \geq g(\theta)$ となるのは

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

3

(1)

3つの負の整数解を α, β, γ ($\alpha \leq \beta \leq \gamma < 0$) とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} -a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\ -c = \alpha\beta\gamma \end{cases}$$

が成立する。 c は素数であるから $-c = \alpha\beta\gamma$ より

$$\begin{cases} \alpha = -c \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

とならざるを得ないことが分かる。よって

$$\begin{cases} a = c + 2 \\ b = 2c + 1 \end{cases}$$

(答) $\begin{cases} a = c + 2 \\ b = 2c + 1 \end{cases}$

(2)

$$\int f'(x) \{ \log(f(x)+1) \} dx = (f(x)+1) \{ \log(f(x)+1) - 1 \} + C$$

の右辺を x で微分して、

$$f'(x) \{ \log(f(x)+1) - 1 \} + \frac{f(x)+1}{f(x)+1} \times f'(x) = f'(x) \{ \log(f(x)+1) \}$$

となる。よって

$$f'(x) \{ \log(f(x)+1) \}$$

の原始関数が

$$(f(x)+1) \{ \log(f(x)+1) - 1 \} + C$$

であることが示せたので、

$$\int f'(x) \{ \log(f(x)+1) \} dx = (f(x)+1) \{ \log(f(x)+1) - 1 \} + C$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$$\log(|f(x)|+1) > 0 \Leftrightarrow |f(x)| > 0$$

であるので、与えられた不等式より

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ |f(x)| < 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} f'(x) < 0 \\ |f(x)| > 0 \end{cases}$$

を得る。前者は成り立たず、後者のみを考えると、結局

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$$

を解けばよい。

$$f(x) = x^3 + (c+2)x^2 + (2c+1)x + c$$

より

$$f'(x) = 3x^2 + 2(c+2)x + 2c+1 = (3x+2c+1)(x+1)$$

である。ここで、 $c > 1$ なので

$$-c < -\frac{2c+1}{3} < -1$$

であることに注意すると

$$(3x+2c+1)(x+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2c+1}{3} < x < -1$$

を得る。また、このとき

$$f(x) \neq 0, \text{ つまり } x \neq -c, -1$$

は満たされている。以上より

$$-\frac{2c+1}{3} < x < -1$$

(答) $-\frac{2c+1}{3} < x < -1$

(4)

$c=7$ のとき、(3) の結果は

$$-5 < x < -1$$

となる。また

$$y = f'(x) \log(|f(x)|+1) = 0$$

となるのは

$$y = 3(x+1)(x+5) \log(|(x+1)^2(x+7)|+1)$$

より

$$x = -1, -5, -7$$

のときであり、

$$f'(x) \log(|f(x)|+1) > 0$$

となるような x の範囲は

$$x < -7, -7 < x < -5, -1 < x$$

であるから、 $y = f'(x) \log(|f(x)|+1)$ の概形は右上図のようになる。

以上より求める面積 S は

$$S = \int_{-7}^{-5} f'(x) \log(|f(x)|+1) dx - \int_{-5}^{-1} f'(x) \log(|f(x)|+1) dx$$

である。 $-7 \leq x$ において $f(x) \geq 0$ であるから (2) の結果を用いれば

$$S = \int_{-7}^{-5} f'(x) \log(f(x)+1) dx - \int_{-5}^{-1} f'(x) \log(f(x)+1) dx$$

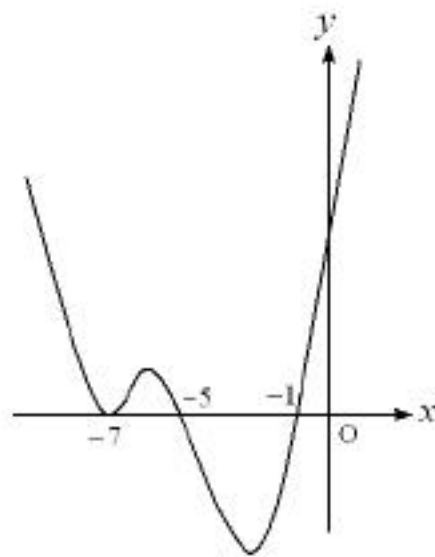
$$= \int_{-7}^{-5} f'(x) \log(f(x)+1) dx - \int_{-5}^{-1} f'(x) \log(f(x)+1) dx$$

$$= \left[(f(x)+1) \{ \log(f(x)+1) - 1 \} \right]_{-7}^{-5} - \left[(f(x)+1) \{ \log(f(x)+1) - 1 \} \right]_{-5}^{-1}$$

$f(-7) = f(-1) = 0, f(-5) = 32$ より

$$\begin{aligned} S &= \{ 33(\log 33 - 1) + 1 \} - \{ -1 - 33(\log 33 - 1) \} \\ &= 66 \log 33 - 64 \end{aligned}$$

(答) $66 \log 33 - 64$



(1)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

とおくと

$$A^2 + uA + E = B^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + ua + 1 & 2ab + ub \\ 0 & a^2 + ua + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & 2cd \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ua + 1 = c^2 \\ 2ab + ub = 2cd \end{cases} \quad \dots (*)$$

となる。任意の実数 a, b に対してこれらを満たす実数 c, d が存在するので、

$$c^2 = a^2 + ua + 1 \geq 0$$

が任意の実数 a で成り立つ。これは a に関する 2 次方程式 $a^2 + ua + 1 = 0$ の判別式について

$$D = u^2 - 4 \leq 0$$

が成り立つことと同値である。よって

$$-2 \leq u \leq 2$$

である。なお、 $c = 0$ となるときは $(*)$ の 2 番目の式の左辺は 0 にならなければならないが

$$c = 0 \text{ のとき } (a, u) = (\pm 1, \mp 2) \quad (\text{複号同順})$$

とすれば左辺は確かに 0 になる。

(証明終)

(2)

(1) と同様に

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

とおくと

$$A^2 + uA + E = B^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + ua + 1 & 2ab + ub \\ 0 & a^2 + ua + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & 2cd \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ua + 1 = c^2 \\ 2ab + ub = 2cd \end{cases} \quad \dots (**)$$

となる。任意の実数 a, b に対してこれらを満たす実数 c, d が存在することを示せばよい。 $-2 \leq u \leq 2$ が成り立つとき、 a に関する 2 次方程式 $a^2 + ua + 1 = 0$ の判別式

$$D = u^2 - 4 \leq 0$$

が成り立つことから、 $(**)$ の 1 番目の式の左辺は 0 以上である。よって

$$c = \pm \sqrt{a^2 + ua + 1}$$

となる実数 c が存在する。 $c \neq 0$ となるとき、 $(**)$ の 2 番目の式より

$$d = \frac{2ab + ub}{2c}$$

となるので、実数 c が存在すれば実数 d も存在する。 $c = 0$ になるとき、 d は任意となるので、実数 d は存在する。以上より、任意の実数 a, b に対してこれらを満たす実数 c, d が存在する。したがって S の各要素 A に対して

$$A^2 + uA + E = B^2$$

となる S の要素 B が存在する。

(証明終)