

平成 21 年度 入学試験問題(前期日程)

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

試験時間 120 分

理学部(理学科・応用理学科)

問題冊子 問題…… 1 ～ 4 ページ…… 1 ～ 2
解答用紙…… 4 枚
下書用紙…… 1 枚

配点…表示のとおり。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に、問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお、解答用紙には、必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは、切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は、持ち帰らないこと。
7. 試験終了後、問題冊子、下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後、指示があるまでは退室しないこと。

1 $x \geq 3$, $y \geq 3$, $x^2y = 3^6$ のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\log_3 x$ および $\log_3 y$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\log_3 x - \log_3 y$ の最大値と最小値を求めよ。
- (3) $(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (4) m, n を正の整数とする。 $\log_3 x^m + \log_3 y^n$ の最大値と最小値が等しくなるときの m と n の関係式を求めよ。

(100 点)

2 $f(\theta) = 2 \sin 2\theta$, $g(\theta) = 2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $x = \sin \theta + \cos \theta$ において, $f(\theta) - g(\theta)$ を x の式で表せ。
- (2) (1)で求めた x の式を $h(x)$ とする。 $h(x) = 0$ を x について解け。
- (3) (2)の結果を用いて, $f(\theta) = g(\theta)$ を θ について解け。
- (4) $f(\theta) \geq g(\theta)$ となる θ の範囲を求めよ。

(100 点)

3 係数 a, b は実数で c は素数である 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。方程式 $f(x) = 0$ は 3 個の負の整数解をもつとする。ただし、重解は重複して数える。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a, b を c を用いて表せ。

(2) $f(x) \geq 0$ となる x の範囲で

$$\int f'(x) \log(f(x) + 1) dx = (f(x) + 1) \{ \log(f(x) + 1) - 1 \} + C$$

を示せ。ただし、 C は積分定数である。

(3) 不等式 $f'(x) \log(|f(x)| + 1) < 0$ を解け。

(4) $c = 7$ のとき、曲線 $y = f'(x) \log(|f(x)| + 1)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(100 点)

4 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の形の 2 次正方行列全体の集合を S とする。ここで、 a, b は実数である。また、

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) u を実数の定数とする。 S の各要素 A に対し、 $A^2 + uA + E = B^2$ となる S の要素 B が存在すれば、

$$-2 \leq u \leq 2$$

であることを示せ。

(2) u は $-2 \leq u \leq 2$ を満たす定数とする。このとき、 S の各要素 A に対し、

$$A^2 + uA + E = B^2$$

となる S の要素 B が存在することを示せ。

(100 点)