

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とおくと,

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

とおける。このとき

$$a_9 = a_1 + 8d = -5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{13} = a_1 + 12d = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つので、①、②を解くと

$$a_1 = -27, \quad d = \frac{11}{4}$$

を得る。よって

$$a_n = \frac{11}{4}n - \frac{119}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{11}{4}n - \frac{119}{4}$$

(2)

a_n が正となる条件は,

$$a_n = \frac{11}{4}n - \frac{119}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow 11n > 119$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{119}{11} = 10.8\dots$$

である。これを満たす最小の自然数 n は

$$n = 11$$

である。

$$(\text{答}) \quad n = 11$$

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{11}{4}k - \frac{119}{4} \right) \\ &= \frac{11}{4} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{119}{4}n \\ &= \frac{n(11n-227)}{8} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{n(11n-227)}{8}$$

(4)

S_n が正となる条件は,

$$S_n = \frac{n(11n-227)}{8} > 0$$

$$\Leftrightarrow 11n > 227 \quad (\because n > 0)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{227}{11} = 20.6\dots$$

である。これを満たす最小の自然数 n は

$$n = 21$$

である。

$$(\text{答}) \quad n = 21$$

2

(1)

$AE:ED=t:1-t$ なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OD} \\ &= (1-t)\vec{a} + 3t\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OE} = (1-t)\vec{a} + 3t\vec{b}$$

(2)

$BE:EC=s:1-s$ なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= s\overrightarrow{OC} + (1-s)\overrightarrow{OB} \\ &= 2s\vec{a} + (1-s)\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OE} = 2s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$$

(3)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は互いに一次独立なので, ①, ②の係数を比較して

$$\begin{cases} 1-t=2s \\ 3t=1-s \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと,

$$t = \frac{1}{5}, \quad s = \frac{2}{5}$$

となるので, ①に代入して

$$\overrightarrow{OE} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OE} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

(4)

P, Q, R はそれぞれ OE, AB, CD の中点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} \\ &= \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} \\ &= \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1}{10}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{10}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}, \quad \overrightarrow{PR} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$$

(5)

(4)の答より,

$$\overrightarrow{PR} = 6\overrightarrow{PQ}$$

が成り立つので,

$$\frac{PR}{PQ} = 6$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{PR}{PQ} = 6$$

3

(1)

$f'(x) = x^2 - 1$ の両辺を積分すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x^2 - 1) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(3) = 6$ なので

$$\begin{aligned} f(3) &= 9 - 3 + C = 6 \\ \Leftrightarrow C &= 0 \end{aligned}$$

である。よって、

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

(2)

$$f'(x) = (x-1)(x+1)$$

なので、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$

よって、 $x = -1$ のとき極大値 $\frac{2}{3}$ 、 $x = 1$ のとき極小値 $-\frac{2}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{極大値 } \frac{2}{3}, \text{ 極小値 } -\frac{2}{3}$$

(3)

$y = f(x)$ と $y = kx$ が接する条件は、方程式 $f(x) = kx$ が重解を持つことである。

$$\begin{aligned} f(x) &= kx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - (k+1)x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 3 - 3k) &= 0 \end{aligned}$$

となり、これが重解をもつ条件は

$$3 + 3k = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = -1$$

(4)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 2 \\ &= \frac{2}{3}(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

なので、 $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\frac{10}{9}$	$\nearrow$

次に、 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの上下関係を調べる。

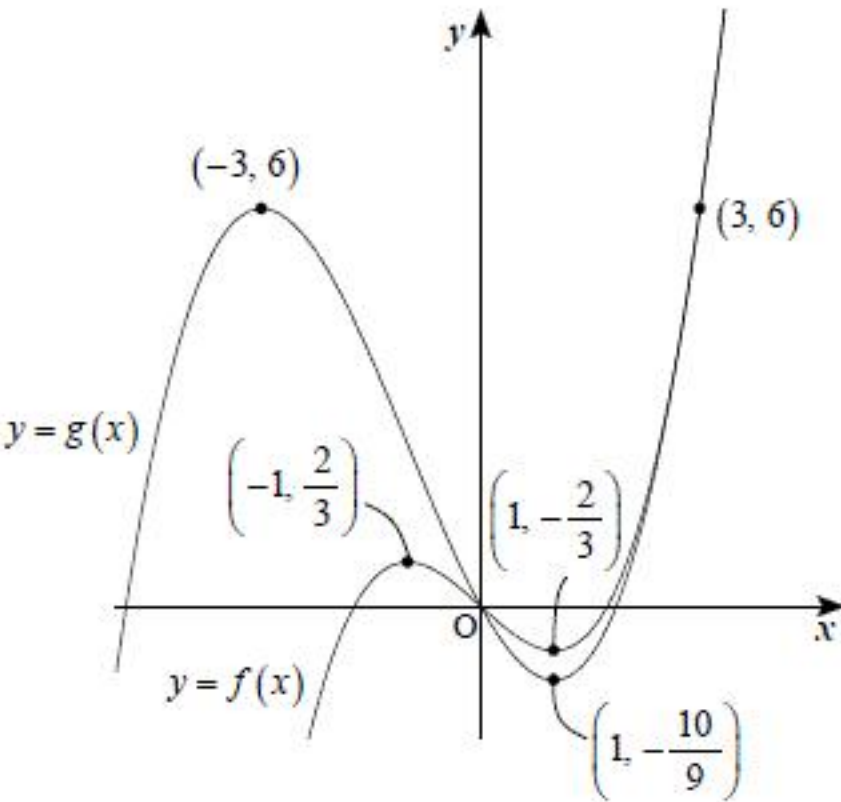
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{3}x^3 - x - \left(\frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 2x \right) \\ &= \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x \\ &= \frac{1}{9}x(x-3)^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} x < 0 \text{ のとき, } f(x) &< g(x) \\ 0 < x < 3, 3 < x \text{ のとき, } f(x) &> g(x) \\ x = 0, 3 \text{ のとき, } f(x) &= g(x) \end{aligned}$$

である。よって、共有点の座標は $(0, 0)$ 、 $(3, 6)$ であり、 $(3, 6)$ は接点でもある。

これらのことに注意すると、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは次図のようになる。



$$(\text{答}) \quad \text{共有点の座標は } (0, 0) \text{ と } (3, 6)$$

(1)

 $k=2, l=1$ のとき、方程式①を解くと

$$x^4 - 2x^2 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5)(x^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{3}i$$

となる。

(答) $x = \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{3}i$

(2)

 $x^2 = t$ とおくと、方程式①は

$$t^2 - 2(k-l)t + (k^2 + l^2 - 6k - 8l) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。すると、方程式①が実数解を持たない条件は、

「方程式②が実数解を持たない」

もしくは

「方程式②が実数解を持つが、0以上の実数解を持たない」

ことである。

以下、 $f(t) = t^2 - 2(k-l)t + (k^2 + l^2 - 6k - 8l)$ とおき、方程式②の判別式を D とする。

[1] 方程式②が実数解を持たないとき

$$\frac{D}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow (k-l)^2 - (k^2 + l^2 - 6k - 8l) < 0$$

$$\Leftrightarrow (k-4)(l-3) > 12$$

[2] 方程式②が実数解を持つが、0以上の実数解を持たないとき

条件は、次の3つである。

$$(i) \quad \frac{D}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (k-4)(l-3) \leq 12$$

$$(ii) \quad (y=f(t) \text{の軸の} t \text{座標}) < 0 \Leftrightarrow k-l < 0$$

$$(iii) \quad f(0) > 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + l^2 - 6k - 8l > 0$$

$$\Leftrightarrow (k-3)^2 + (l-4)^2 > 25$$

以上より、求める条件は

$$\text{「}(k-4)(l-3) > 12\text{」}$$

または

$$\text{「}(k-4)(l-3) \leq 12 \text{ かつ } k < l \text{ かつ } (k-3)^2 + (l-4)^2 > 25\text{」}$$

である。

(答) 「 $(k-4)(l-3) > 12$ 」または「 $(k-4)(l-3) \leq 12$ かつ $k < l$ かつ $(k-3)^2 + (l-4)^2 > 25$ 」

(3)

方程式①が異なる3つの実数解を持つ条件は、

方程式②が異なる2つの実数解を持ち、なおかつ

そのうち1つの解が0であり、もう1つの解が正であることである。

まず、方程式②が $t=0$ を解に持つ条件は

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow (k-3)^2 + (l-4)^2 = 25$$

である。このとき、方程式②は

$$t^2 - 2(k-l)t = 0 \Leftrightarrow t\{t - 2(k-l)\} = 0$$

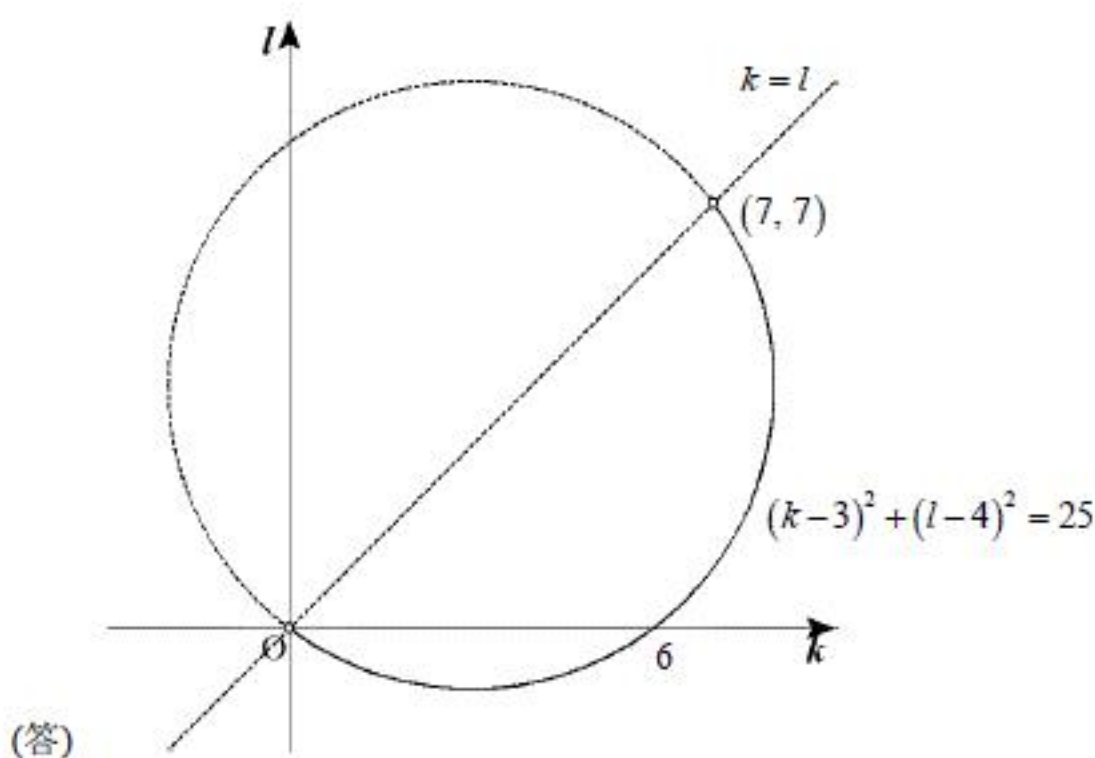
となるので、②は $t = 2(k-l)$ を実数解に持つ。これが正である条件は

$$2(k-l) > 0 \Leftrightarrow k > l$$

である。以上より、求める条件は

$$(k-3)^2 + (l-4)^2 = 25 \text{ かつ } k > l$$

であるから、これを図示すると次図実線部ようになる。(端点は含まない)



(4)

方程式①がただ1つの実数解を持つ条件は、

方程式②が2つの実数解を持ち、なおかつ

そのうち1つの解が0であり、もう1つの解が0以下であることである。

(3)と同様に考えると、この条件は

$$(k-3)^2 + (l-4)^2 = 25 \text{ かつ } k \leq l$$

である。これを満たす整数の組 (k, l) は

$$(k, l) = (-2, 4), (-1, 1), (-1, 7), (0, 0), (0, 8), (3, 9), (6, 8), (7, 7)$$

である。

(答) $(k, l) = (-2, 4), (-1, 1), (-1, 7), (0, 0), (0, 8), (3, 9), (6, 8), (7, 7)$