

(1)

A 地点から B 地点まで最短距離で行くには、上に 4m、右に 6m 移動すればよいので、求める経路は

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 210 通り

(2)

A 地点から C 地点まで最短距離で行く経路は、

$${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ 通り}$$

ある。同様に、C 地点から B 地点まで最短距離で行く経路も 10 通りあるので、

A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち、C 地点を通る経路は

$$10 \cdot 10 = 100 \text{ 通り}$$

ある。

したがって、A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち、C 地点を通らない経路は

$$210 - 100 = 110 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 110 通り

(3)

5m 以上の直線路は横方向にのみとることができる。

[1] 最も長い直線路が 6m のとき

直線路のとりかたが 5 通りある。

[2] 最も長い直線路が 5m のとき

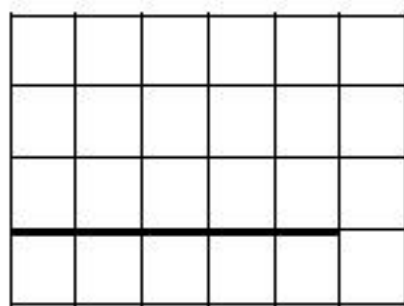


図 1

例えば、図 1 の太線部を通る場合、その前後では上下方向に進む必要があるので、

$$1 \cdot {}_3C_1 = 3 \text{ 通り}$$

ある。同様に、全ての直線路の場合を足し上げると、

$$4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 20 \text{ 通り}$$

ある。

以上より、求める経路は

$$5 + 20 = 25 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 25 通り

(4)

(3)において、最も長い直線路の長さが 5m 以上であるような経路の数を求めたので、

最も長い直線路の長さが 4m であるような経路の数を求めればよい。

4m の直線路は縦方向、横方向いずれにもとることができるので、そのような経路の数は

$$\begin{aligned} & (\text{縦方向にのみ 4m の直線路をとるような経路の数}) + \\ & (\text{横方向に 4m の直線路をとるような経路の数}) \end{aligned}$$

である。

[1] 縦方向にのみ 4m の直線路をとるような経路の数

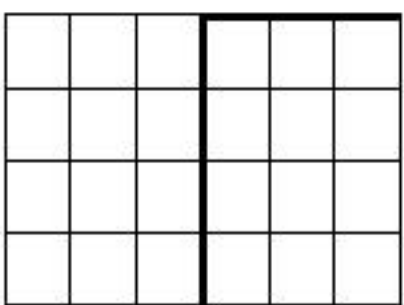


図 2

図 2 の 1 通りである。

[2] 横方向に 4m の直線路をとるような経路の数 (縦方向に 4m の直線路をとってもよい)

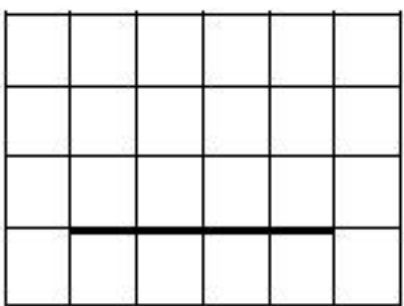


図 3

例えば、図 3 の太線部を通る場合、その前後では上下方向に進む必要があるので、

$$1 \cdot {}_3C_1 = 3 \text{ 通り}$$

ある。同様に、全ての直線路の場合を足し上げると、

$$\begin{aligned} & {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_2 + {}_2C_2 + 1 \cdot {}_3C_1 + {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 + {}_3C_1 \cdot 1 + \\ & {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 \\ & = 10 + 6 + 3 + 1 + 3 + 4 + 3 + 1 + 3 + 6 + 10 \\ & = 50 \text{ 通り} \end{aligned}$$

ある。

したがって、最も長い直線路の長さが 4m であるような経路は

$$1 + 50 = 51 \text{ 通り}$$

ある。

(3)の答を用いると、求める経路の数は

$$25 + 51 = 76 \text{ 通り}$$

である。

(答) 76 通り

2

(1)

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -b \\ d & -d \end{pmatrix}$$

これらの成分を比較すると

$$AX = XA$$

$$\Leftrightarrow b = 0, a - c = d, b - d = -d$$

$$\Leftrightarrow b = 0, d = a - c$$

であるから,

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a - c \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a - c \end{pmatrix}$$

(2)

$c = 0$ のとき, ①を満たす X は, (1)より $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ と表せる。このとき

$$X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$X^3 = X$$

$$\Leftrightarrow a^3 = a$$

$$\Leftrightarrow a(a+1)(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0, \pm 1$$

となる。よって, 求める X は

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

①を満たす X は, (1)より $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a - c \end{pmatrix}$ と表せる。

ケーリー・ハミルトンの定理を用いると

$$X^2 - (2a - c)X + a(a - c)E = O$$

$$\Leftrightarrow X^2 = (2a - c)X - a(a - c)E$$

であるから,

$$\begin{aligned} X^3 &= (2a - c)X^2 - a(a - c)X \\ &= (2a - c)\{(2a - c)X - a(a - c)E\} - a(a - c)X \\ &= (3a^2 - 3ac + c^2)X - a(a - c)(2a - c)E \end{aligned}$$

となる。よって,

$$X^3 = X$$

$$\Leftrightarrow (3a^2 - 3ac + c^2 - 1)X = a(a - c)(2a - c)E \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。ここで, $c \neq 0$ であるから,

実数 k を用いて $X = kE$ と表すことができないことに注意すると,

$$\textcircled{2}' \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 3ac + c^2 - 1 = 0 \\ a(a - c)(2a - c) = 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。③の第2式より, $a = 0, c, \frac{c}{2}$ である。

[1] $a = 0$ のとき

③の第1式に代入すると,

$$c^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \pm 1$$

となるので, $(a, c) = (0, \pm 1)$ である。

[2] $a = c$ のとき

③の第1式に代入すると,

$$c^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \pm 1$$

となるので, $(a, c) = (\pm 1, \pm 1)$ である。(複号同順)

[3] $a = \frac{c}{2}$ のとき

③の第1式に代入すると,

$$\frac{1}{4}c^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \pm 2$$

となるので, $(a, c) = (\pm 1, \pm 2)$ である。(複号同順)

以上より, 求める X は

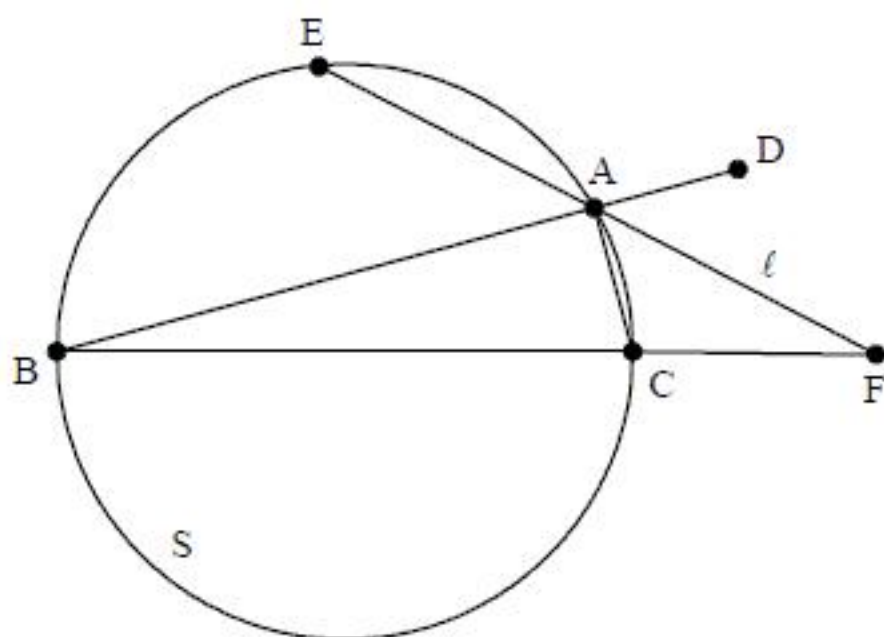
$$X = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad X = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)

題意にしたがって図形を描くと、次図のようになる。



(答)

(2)

四角形 ACBE は円に内接しているので

$$\angle AEB = \angle ACF \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、直線 ℓ は $\angle CAD$ を二等分するので

$$\angle CAF = \angle DAF = \angle BAE \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①, ②より三角形 ACF と三角形 AEB が相似であることが示された。

(証明終)

(3)

(2)より,

$$\angle ABE = \angle AFC$$

が成り立つ。 $\angle AEB$ は共通なので、三角形 EAB と三角形 EBF は相似であることが分かる。
よって,

$$EB : AB = EF : BF$$

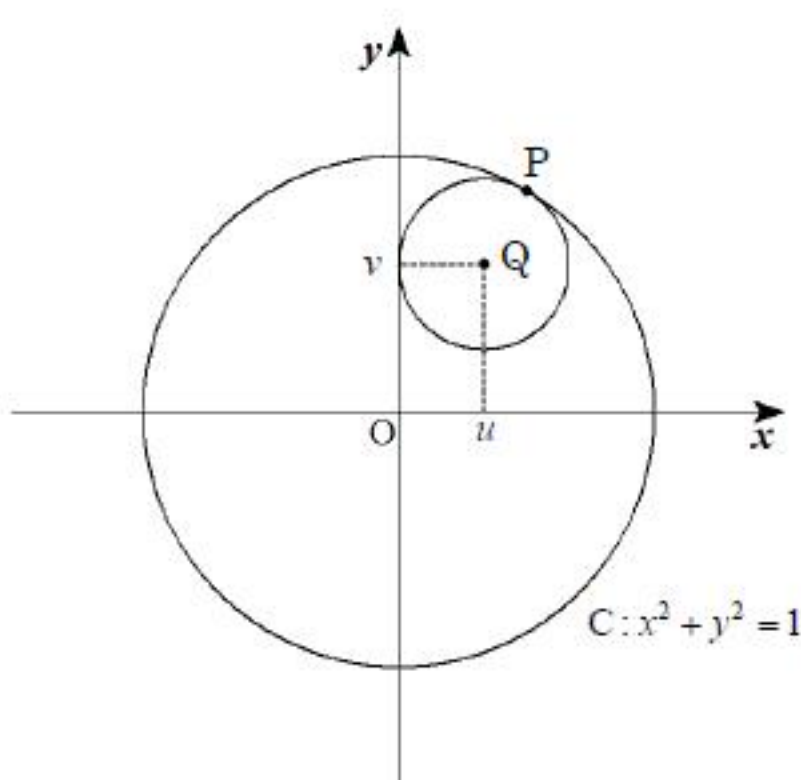
$$\Leftrightarrow AB \cdot EF = EB \cdot BF$$

が成り立つ。

(証明終)

4

(1)



円 S は P で円 C に接するので、 Q は OP 上にある。よって、

$$u \tan \theta = v \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、円 S は y 軸に接するので、円 S の半径は u である。よって、

$$\begin{aligned} OP &= OQ + QP \\ \Leftrightarrow 1 &= \sqrt{u^2 + v^2} + u \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。①を②に代入すると、

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{u^2 + u^2 \tan^2 \theta} + u \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{u}{\cos \theta} + u \quad (\because \cos \theta > 0) \\ \Leftrightarrow u &= \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} \end{aligned}$$

を得る。これを①に代入すると、

$$\begin{aligned} v &= u \tan \theta \\ &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad u = \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}, \quad v = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

(2)

(1)より

$$\cos \theta = \frac{u}{1 - u}$$

であり、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sqrt{1 - 2u}}{1 - u} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} v &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{\sqrt{1 - 2u}}{1 - u} \\ \Leftrightarrow v &= \frac{1 - u}{1 + \frac{u}{1 - u}} \\ \Leftrightarrow v &= \sqrt{1 - 2u} \end{aligned}$$

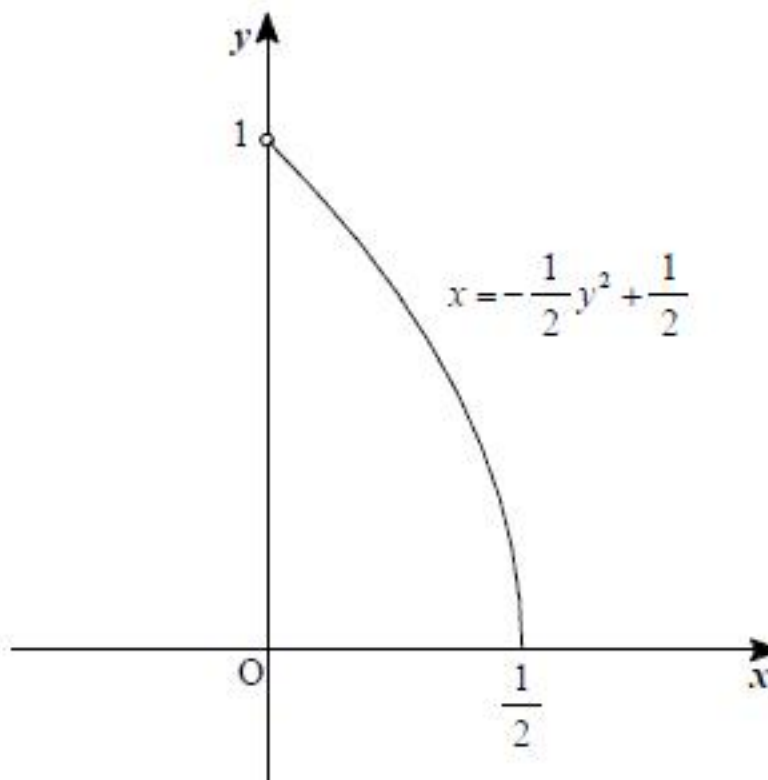
となる。 $0 \leq v < 1$ のもとで、両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} v^2 &= 1 - 2u \\ \Leftrightarrow u &= -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、点 Q の軌跡の式は

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \quad (0 \leq y < 1)$$

である。軌跡を図示すると次図のようになる。(白丸は含まない)



(答)

(3)

円 S の面積は

$$\begin{aligned} D(\theta) &= \pi u^2 \\ &= \pi \left(\frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{D(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2} &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi \left(\frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^2}{\alpha^2} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi}{(1 + \sin \alpha)^2} \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ とおいた。

(答) π