

1

(1)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (-1, 3, -2) \cdot (1, -1, 0) \\ &= -1 - 3 \\ &= -4 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 14 - 4t\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -4, \vec{a} \cdot \vec{c} = 14 - 4t$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 14 - 4t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{7}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2 &= |\vec{a} + t\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2 |\vec{b}|^2 \\ &= 14 - 8t + 2t^2\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{c}|^2 = 2t^2 - 8t + 14$$

(4)

(3)より,

$$\begin{aligned}|\vec{c}| &= \sqrt{2t^2 - 8t + 14} \\ &= \sqrt{2(t-2)^2 + 6}\end{aligned}$$

であるから、 $|\vec{c}|$ の最小値は $t=2$ のとき $\sqrt{6}$ である。

$$(\text{答}) \quad t=2 \text{ のとき } \sqrt{6}$$

(5)

$$\begin{aligned}|\vec{c}| &= |\vec{a}| \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 8t + 14 &= 14 \\ \Leftrightarrow 2t(t-4) &= 0 \\ \therefore t &= 4 \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t = 4$$

2

(1)

$$\begin{aligned} t^2 &= (2^x + 2^{-x})^2 \\ &= 4^x + 2 + 4^{-x} \end{aligned}$$

より,

$$f(x) = 4^x + 4^{-x} + 2 - 4(2^x + 2^{-x}) = t^2 - 4t$$

と求まる。

(答) $t^2 - 4t$

(2)

$2^x, 2^{-x} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係より、

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

となる。(等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x=0$ の時に成立)

(答) $t \geq 2$

(3)

(1)より,

$$f(x) = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$$

であるから、 $f(x)$ は $t=2$ のときに最小値 -4 をとる。(2)より、すなわち $x=0$ のとき最小値 -4 をとる。

(答) $x=0$ のとき最小値 -4

(4)

(1)より,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 0, 4 \end{aligned}$$

となるが、 $t \geq 2$ であるから、

$$t = 4$$

である。このとき、

$$2^x + 2^{-x} = 4$$

である。両辺に $2^x (\neq 0)$ をかけて、

$$\begin{aligned} 2^{2x} + 1 &= 4 \cdot 2^x \\ \Leftrightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $2^x = X$ とおくと、 $X > 0$ であり、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0 \\ \therefore X &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。これらは $X > 0$ をみたす。したがって、 $f(x) = 0$ を満たす x は、

$$\begin{aligned} 2^x &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \therefore x &= \log_2(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$

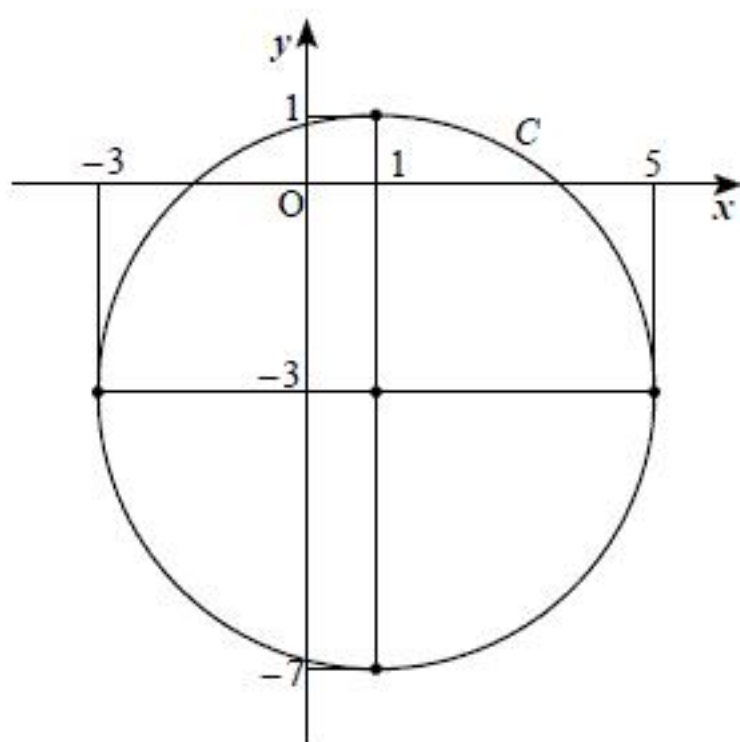
3

(1)

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$$

であるから、図形 C は中心 $(1, -3)$ 、半径 4 の円であるから下図のとおりである。



(答) 前図

(2)

図形 C は円であるから、 $2x + 3y = k$ が図形 C の中心を通ればよい。したがって、

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = k$$

$$\therefore k = -7$$

と求まる。

(答) $k = -7$

(3)

点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - k|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} < 4$$

を満たすような k を求めればよい。したがって、上式を解くと、

$$-7 - 4\sqrt{13} < k < -7 + 4\sqrt{13}$$

と求まる。

(答) $-7 - 4\sqrt{13} < k < -7 + 4\sqrt{13}$

(4)

傾きが $-\frac{2}{3}$ である方程式は、

$$2x + 3y = k$$

で表すことができるから、(2)と同様にすると、

$$\frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - k|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 4$$

$$\therefore k = -7 \pm 4\sqrt{13}$$

となるので、

$$2x + 3y = -7 \pm 4\sqrt{13}$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x + \frac{-7 \pm 4\sqrt{13}}{3}$$

と求まる。

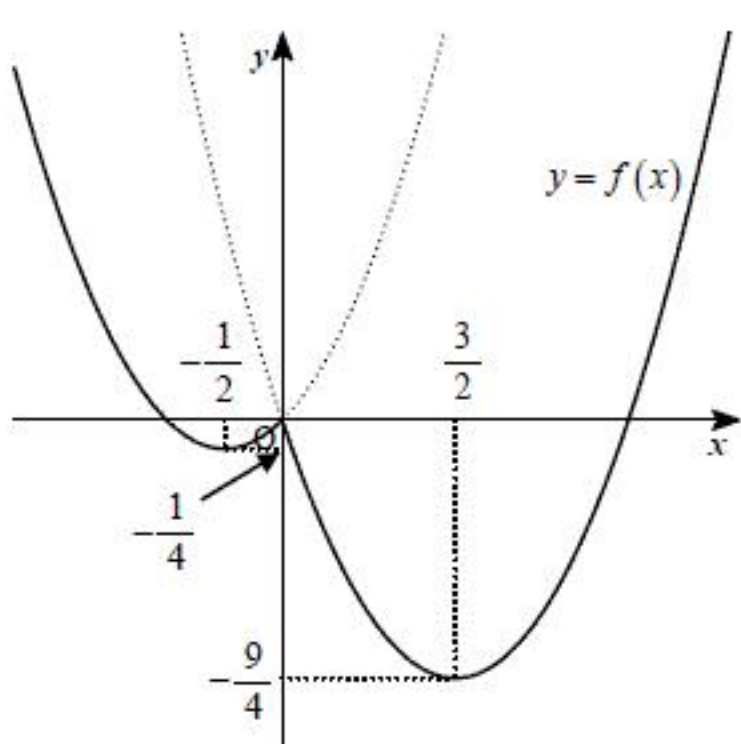
(答) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{-7 \pm 4\sqrt{13}}{3}$

(1)

$$y = \begin{cases} x^2 - 3x & (x \geq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} & (x \geq 0) \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} & (x < 0) \end{cases}$$

であるから、 $y = f(x)$ のグラフは下図のとおりである。



(答) 前図

(2)

$y = mx$ は $y = f(x)$ と m の値に関わらず原点で交わるので、その他の場所で1回だけ交わればよい。もう1点の x 座標が正か負かで場合分けをする。

[1] $x > 0$ で交わるとき

$y = x^2 + x$ について、 $y' = 2x + 1$ であるから、 $x = 0$ における接線の傾きは1である。したがって、グラフより、 $m < 1$ とすれば、 $x < 0$ において交点を持つってしまうので、 $m \geq 1$ が必要である。

一方、 $x > 0$ で $y = mx$ と $y = f(x)$ が交点をもつとき、

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= mx \\ \Leftrightarrow x^2 - (3+m)x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-3-m) &= 0 \\ \therefore x &= 3+m \end{aligned}$$

となることから、 $3+m > 0$ 、すなわち、 $m > -3$ が必要である。

以上より、この場合に条件をみたす m の範囲は、

$$m \geq 1$$

である。

[2] $x < 0$ で交わるとき

[1]と同様に、 $y = x^2 - 3x$ について $y' = 2x - 3$ であるから、その $x = 0$ における接線の傾きは -3 である。したがって、 $x > 0$ で交点を持たないためには $m \leq -3$ が必要である。

さらに、 $x < 0$ で交点をもつとき、

$$\begin{aligned} x^2 + x &= mx \\ \Leftrightarrow x^2 - (m-1)x &= 0 \\ \Leftrightarrow x\{x - (m-1)\} &= 0 \\ \therefore x &= m-1 \end{aligned}$$

となることから、 $m-1 < 0$ 、すなわち $m < 1$ が必要である。以上より、この場合に条件をみたす m の範囲は

$$m \leq -3$$

である。

以上、[1]、[2]より、 $y = f(x)$ と $y = mx$ が異なる2つの共有点をもつような m の値の範囲は

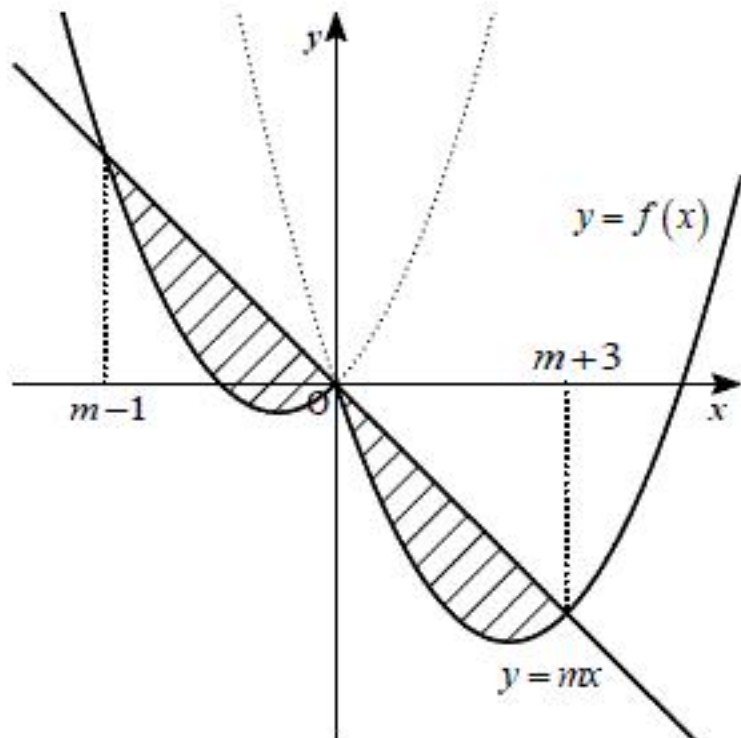
$$m \leq -3, 1 \leq m$$

となる。

(答) $m \leq -3, 1 \leq m$

(3)

(2)より、 $-3 < m < 1$ のとき $y = f(x)$ と $y = mx$ は3つの共有点をもつ。このとき、求める面積は下図の斜線部であるから、



$$\begin{aligned} S &= \int_{m-1}^0 (mx - x^2 - x) dx + \int_0^{m+3} (mx - x^2 + 3x) dx \\ &= -\int_{m-1}^0 x(x-m+1) dx - \int_0^{m+3} x(x-m-3) dx \\ &= \frac{1}{6}(1-m)^3 + \frac{1}{6}(m+3)^3 \\ &= 2m^2 + 4m + \frac{14}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = 2m^2 + 4m + \frac{14}{3}$

(4)

(3)より、

$$S = 2m^2 + 4m + \frac{14}{3} = 2(m+1)^2 + \frac{8}{3}$$

と変形できる。 $-3 < m < 1$ であるから、 S は $m = -1$ のとき最小値 $\frac{8}{3}$ をとる。

(答) $m = -1$ のとき最小値 $\frac{8}{3}$