

1

(1)

$$\begin{aligned} t^2 &= (2^x + 2^{-x})^2 \\ &= 4^x + 2 + 4^{-x} \end{aligned}$$

より,

$$f(x) = 4^x + 4^{-x} + 2 - 4(2^x + 2^{-x}) = t^2 - 4t$$

と求まる。

(答) $t^2 - 4t$

(2)

$2^x, 2^{-x} > 0$ であるから, 相加相乗平均の関係より,

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

となる。(等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x=0$ の時に成立)

(答) $t \geq 2$

(3)

(1)より,

$$f(x) = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$$

であるから, $f(x)$ は $t=2$ のときに最小値 -4 をとる。(2)より, すなわち $x=0$ のとき最小値 -4 をとる。

(答) $x=0$ のとき最小値 -4

(4)

(1)より,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 0, 4 \end{aligned}$$

となるが, $t \geq 2$ であるから,

$$t = 4$$

である。このとき,

$$2^x + 2^{-x} = 4$$

である。両辺に $2^x (\neq 0)$ をかけて,

$$\begin{aligned} 2^{2x} + 1 &= 4 \cdot 2^x \\ \Leftrightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで, $2^x = X$ とおくと, $X > 0$ であり,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0 \\ \therefore X &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。これらは $X > 0$ をみたす。したがって, $f(x) = 0$ を満たす x は,

$$\begin{aligned} 2^x &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \therefore x &= \log_2(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$

2

(1)

$\angle P_1OP_0 = \frac{\pi}{2}$ より, 直角二等辺三角形が 2 つできるので,

$$S_2 = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

と求まる。

(答) $S_2 = 1$

(2)

$$\angle P_kOP_{k-1} = \frac{\pi}{n}$$

であるから,

$$T_k = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n}$$

となる。したがって,

$$S_k = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{n}{2} \sin \frac{\pi}{n}$$

である。

(答) $S_n = \frac{n}{2} \sin \frac{\pi}{n}$

(3)

(2)より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{2}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

(4)

$\triangle P_kOP_{k-1}$ は二等辺三角形であるから,

$$\begin{aligned} \angle OP_{k-1}P_k &= \frac{1}{2}(\pi - \angle P_kOP_{k-1}) \\ &= \frac{(n-1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

となる。すると, $P_{k-1}P_k$ を底辺と見ることにより,

$$T_k = \frac{1}{2} \cdot e_k \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

が得られる。したがって,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n T_k \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n e_k \right) \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \\ &= \frac{1}{2} E_n \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(5)

(4)より,

$$E_n = 2S_n \cdot \frac{1}{\sin \frac{(n-1)\pi}{2n}}$$

である。(3)より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{2}$$

であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \pi$$

と求まる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \pi$

(1)

$$\begin{aligned}
& \int_0^x (t+2) \sin(x-t) dt \\
&= \left[(t+2) \cos(x-t) \right]_0^x - \int_0^x \cos(x-t) dt \\
&= (x+2) - 2 \cos x + \left[\sin(x-t) \right]_0^x \\
&= (x+2) - 2 \cos x - \sin x \\
&= x - \sin x - 2 \cos x + 2
\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $x - \sin x - 2 \cos x + 2$

(2)

加法定理より,

$$\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$$

だから,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^x (f(t)+2) \sin(x-t) dt \\
&= \int_0^x (f(t)+2) (\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt \\
&= \sin x \int_0^x (f(t)+2) \cos t dt - \cos x \int_0^x (f(t)+2) \sin t dt
\end{aligned}$$

と表せる。

(証明終)

(3)

(2)の両辺を微分すると,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \cos x \int_0^x (f(t)+2) \cos t dt + \sin x \cos x (f(x)+2) \\
&\quad + \sin x \int_0^x (f(t)+2) \sin t dt - \cos x \sin x (f(x)+2) \\
&= \int_0^x (f(t)+2) (\cos x \cos t + \sin x \sin t) dt \\
&= \int_0^x (f(t)+2) \cos(x-t) dt
\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(4)

(3)より,

$$g'(x) = \cos x \int_0^x (f(t)+2) \cos t dt + \sin x \int_0^x (f(t)+2) \sin t dt$$

であるから, 上式の両辺を微分して,

$$\begin{aligned}
g''(x) &= -\sin x \int_0^x (f(t)+2) \cos t dt + \cos^2 x (f(x)+2) \\
&\quad + \cos x \int_0^x (f(t)+2) \sin t dt + \sin^2 x (f(x)+2) \\
&= -\int_0^x (f(t)+2) (\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt + (\sin^2 x + \cos^2 x) (f(x)+2) \\
&= -\int_0^x (f(t)+2) \sin(x-t) dt + f(x)+2 \\
&= f(x) - g(x) + 2
\end{aligned}$$

と求まる。

(証明終)

(5)

(4)より, このとき

$$g''(x) = 2$$

であるから,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x + C_1 \\
g(x) &= x^2 + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

と表される。ここで,

$$g'(x) = \int_0^x (f(t)+2) \cos(x-t) dt \quad \dots \textcircled{2}$$

より,

$$g'(0) = 0$$

であり,

$$g(x) = \int_0^x (f(t)+2) \sin(x-t) dt \quad \dots \textcircled{3}$$

より,

$$g(0) = 0$$

であるから, ①, ②, ③より,

$$C_1 = C_2 = 0$$

であることが分かる。以上より,

$$f(x) = g(x) = x^2$$

と求まる。

(答) $f(x) = x^2$

(1)

三角関数の和積公式より、

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

であるから、 $\alpha = (n+1)x$, $\beta = (n-1)x$ を代入して、

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2 \cos nx \cos x$$

となる。上式を変形すると、

$$\cos(n+1) = 2 \cos nx \cos x - \cos(n-1)$$

が得られる。

(証明終)

(2)

全ての自然数 n に対し、3 で割り切れない整数 m が存在して、 $\cos n\theta$ が $\frac{m}{3^n}$ という形で表されることを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\cos \theta = -\frac{1}{3}$$

であるから成り立つ。

[2] $n=2$ のとき

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 1 = -\frac{7}{9} = \frac{-7}{3^2}$$

であるから成り立つ。

[3] $n=k, k+1$ のとき成り立つと仮定して、 $n=k+2$ のとき

このとき、3 で割り切れない整数 m_k, m_{k+1} が存在して、

$$\cos k\theta = \frac{m_k}{3^k}, \cos(k+1)\theta = \frac{m_{k+1}}{3^{k+1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

とかけている。(1)より、

$$\cos(k+2)\theta = 2 \cos(k+1)\theta \cos \theta - \cos k\theta$$

であるから、①を用いて、

$$\begin{aligned} \cos(k+2)\theta &= 2 \frac{m_{k+1}}{3^{k+1}} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{m_k}{3^k} \\ &= -2 \frac{m_{k+1}}{3^{k+2}} - \frac{m_k}{3^k} \\ &= -\frac{1}{3^{k+2}} \cdot (2m_{k+1} + 9m_k) \end{aligned}$$

となる。ここで、 m_{k+1} は 3 の倍数でないので、 $2m_{k+1} + 9m_k$ は 3 の倍数でない。したがって、 $n=k+2$ でも成り立つことがわかる。

以上、[1], [2], [3]より、全ての自然数 n について、3 で割り切れない整数 m が存在して、 $\cos n\theta$ は $\frac{m}{3^n}$ という形で表されることが示された。

(証明終)

(3)

主張を背理法で示す。 $\frac{\theta}{\pi}$ が有理数であると仮定する。このとき、

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ は整数, } q \text{ は自然数, } p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

と置くことができる。よって、

$$\theta = \frac{p}{q} \pi \quad \dots \textcircled{2}$$

である。(2)より、3 で割り切れない整数 m_q が存在して、

$$\cos q\theta = \frac{m_q}{3^q}$$

が成り立つ。上式に②を代入すると、

$$\cos p\pi = \frac{m_q}{3^q}$$

となるが、左辺は p が整数であることから $\cos p\pi = \pm 1$ であるのに対して、右辺は q が自然数で、 m_q は 3 の倍数でない整数であるから、1, -1 の値を取ることはない。したがって上式は成

り立たず矛盾する。以上より、 $\frac{\theta}{\pi}$ は無理数である。

(証明終)