

平成 23 年度 入学試験問題(前期日程)

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

試験時間 120 分

理学部(理学科・応用理学科)

問題冊子 問題…… 1 ～ 4 ページ…… 1 ～ 2

解答用紙…… 4 枚

下書用紙…… 1 枚

配 点……表示のとおり。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に、問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお、解答用紙には、必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは、切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は、持ち帰らないこと。
7. 試験終了後、問題冊子、下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後、指示があるまでは退室しないこと。

1 関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2^{2+x} - 2^{2-x} + 2$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ において、 $f(x)$ を t で表せ。
- (2) t の値の範囲を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。
- (4) 方程式 $f(x) = 0$ を解け。

(100 点)

2 n を 2 以上の自然数とする。平面上に距離が 1 である 2 点 O, P_0 がある。中心が O で半径 1 の円周上に点 P_k ($k = 1, 2, \dots, n$) を反時計回りに $\angle P_k O P_0 = \frac{k\pi}{n}$ となるようにとる。三角形 $P_k O P_{k-1}$ の面積を T_k と表し、 $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) S_2 を求めよ。
- (2) S_n を n で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。
- (4) e_k を線分 $P_{k-1} P_k$ の長さにおいて、 $E_n = \sum_{k=1}^n e_k$ とする。このとき、

$$S_n = \frac{1}{2} E_n \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \text{ を示せ。}$$

- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ を求めよ。

(100 点)

3 連続関数 $f(x)$ に対して,

$$g(x) = \int_0^x (f(t) + 2) \sin(x - t) dt$$

とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 定積分 $\int_0^x (t + 2) \sin(x - t) dt$ を求めよ。
- (2) $g(x) = \sin x \int_0^x (f(t) + 2) \cos t dt - \cos x \int_0^x (f(t) + 2) \sin t dt$ を示せ。
- (3) 関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ は $g'(x) = \int_0^x (f(t) + 2) \cos(x - t) dt$ となることを示せ。
- (4) 関数 $g'(x)$ の導関数 $g''(x)$ は $g''(x) = f(x) - g(x) + 2$ となることを示せ。
- (5) 任意の実数 x に対して $g(x) = f(x)$ が成り立つとき、 $f(x)$ を求めよ。

(100 点)

4 n を自然数とし、 θ を $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ であるような実数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\cos(n + 1)x = 2 \cos nx \cos x - \cos(n - 1)x$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\cos n\theta$ は $\frac{m}{3^n}$ という形の分数で表されることを示せ。ただし、 m は整数で $|m|$ は 3 を約数にもたない。
- (3) (2)を用いて $\frac{\theta}{\pi}$ は無理数であることを示せ。

(100 点)