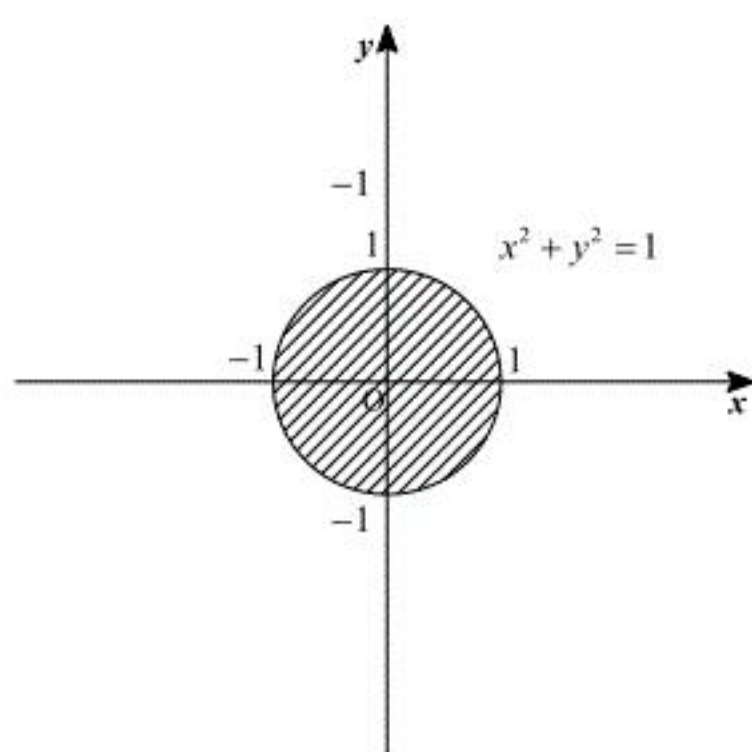


1

(1)

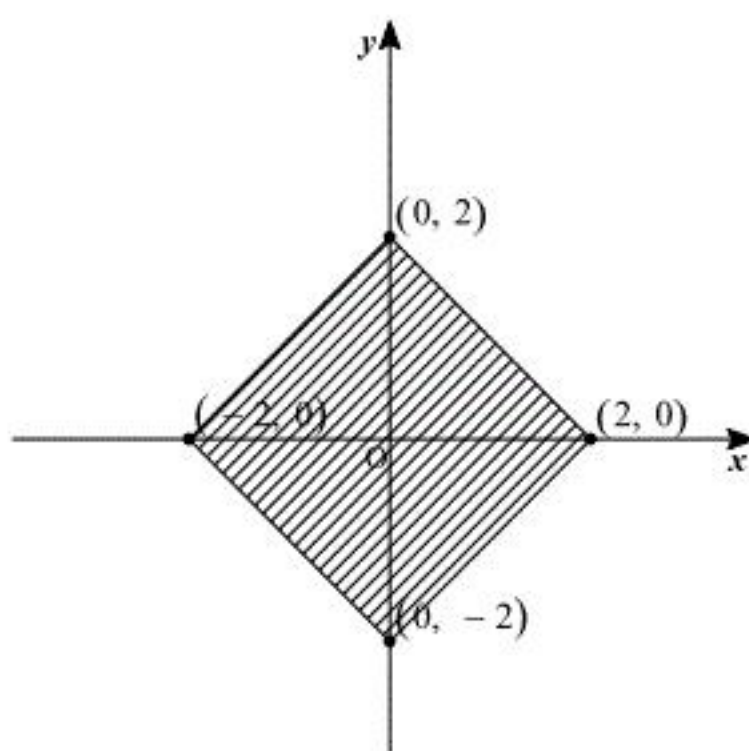
$x^2 + y^2 < 1$ は中心が原点、半径が1の円の内部であるから、求める領域は下の図のようになる。



(答) 前図(但し、境界線を含まない)

(2)

求める領域は、 x 軸、 y 軸対称であるから、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ について考えると、不等式は、 $x + y < 2$ ($x \geq 0$ 、 $y \geq 0$)となる。したがって、対称性を考慮すると求める領域は下の図のようになる。



(答) 前図(但し、境界線を含まない)

(3)

$$x^2 + y^2 < 5$$

$$\Leftrightarrow y^2 < 5 - x^2$$

となる。ここで、 x, y は実数であるから、

$$0 \leq y^2 < 5 - x^2$$

である。つまり、

$$0 < 5 - x^2$$

$$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

とわかり、 $\sqrt{5} < 3$ であるから、

$$|x| < 3$$

が証明された。 y についても同様に、 $|y| < 3$ である。以上より、題意を示せた。

(証明終)

(4)

与式の両辺を2乗したものの大小を比べると

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - (|x| + |y|)^2 \\ &= 4(x^2 + y^2) - (x^2 + 2|x||y| + y^2) \\ &= 2(x^2 + y^2) + (x^2 - 2|x||y| + y^2) \\ &= 2(x^2 + y^2) + (|x| - |y|)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より、

$$(|x| + |y|)^2 \leq \left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$

とわかる。 $|x| + |y| \geq 0$ 、 $2\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ であるから、

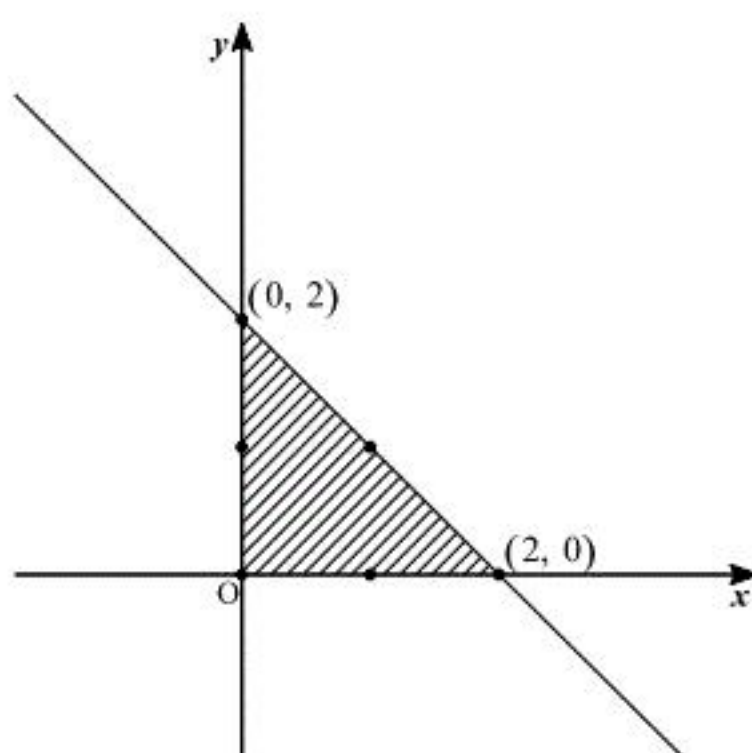
$$|x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

が証明された。

(証明終)

(1)

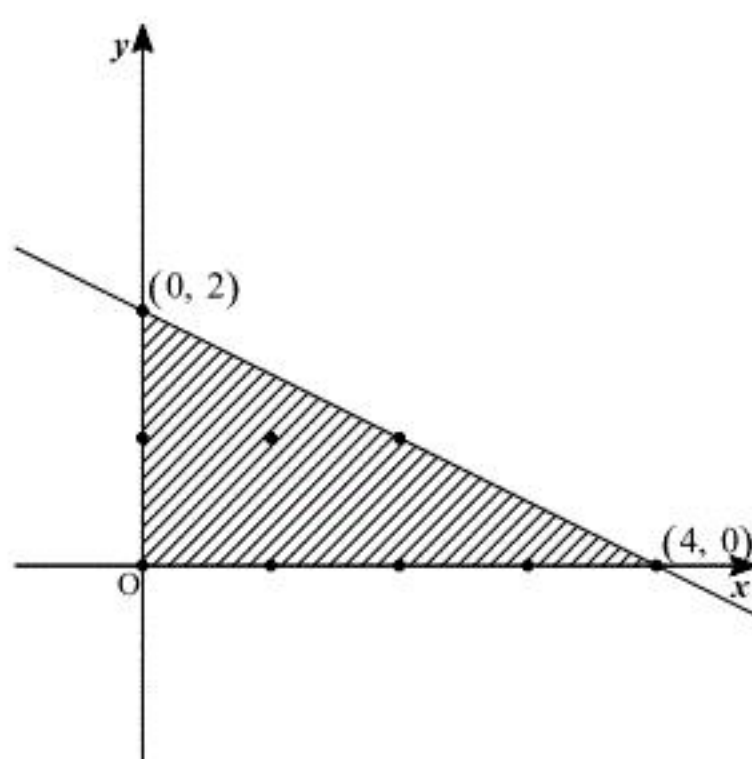
$n=1$ のとき、 $y \leq -x+2$ 、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ を満たす領域を以下に示す。(境界線を含む)



よって、

$$a_1 = 6$$

である。また、 $n=2$ のとき、同様に、 $y \leq -\frac{1}{2}x+2$ 、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ を満たす領域を以下に示す。(境界線を含む)



よって、

$$a_2 = 9$$

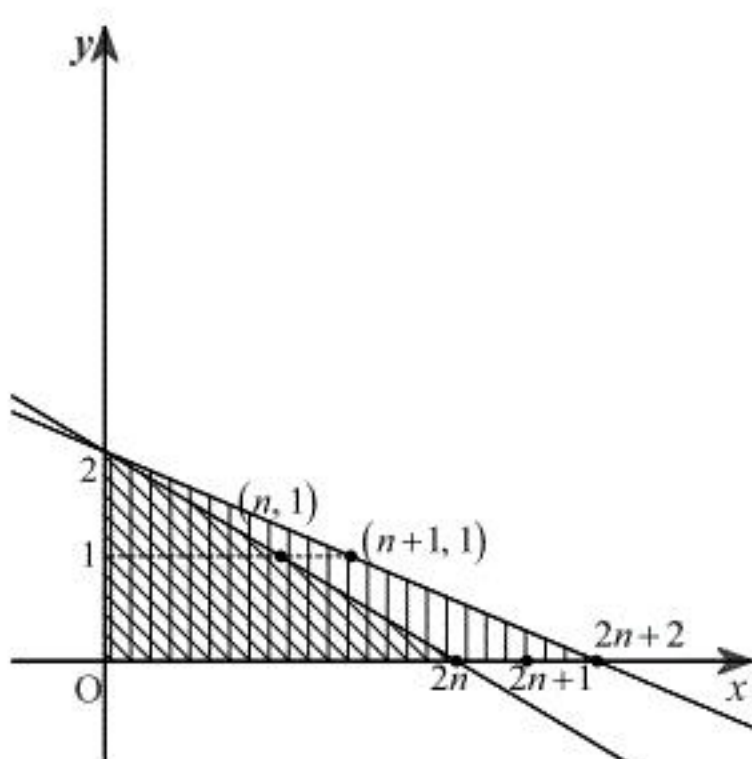
である。

(答) $a_1 = 6$, $a_2 = 9$

(2)

$y \leq -\frac{1}{n}x+2$ 、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ を満たす領域は以下の図の斜線部であり、 $y \leq -\frac{1}{n+1}x+2$ 、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ を満たす領域は以下の図の縦線部である。(境界線を含む)ここで、

$y = -\frac{1}{n}x+2$ と $y=1$ の交点は $(n, 1)$ であり、 x 切片は $2n$ である。同様に、 $y = -\frac{1}{n+1}x+2$ と $y=1$ の交点は $(n+1, 1)$ であり、 x 切片は $2n+2$ である。



したがって、上図より縦線部に含まれる整数 (x, y) の組の数は斜線部に含まれる整数 (x, y) の組の数よりも

$$(n+1, 1), (2n+1, 0), (2n+2, 0)$$

の分、3つ多くなっている。よって、

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

とわかる。

(答) $a_{n+1} = a_n + 3$

(3)

(1), (2)より a_n は初項 6、公差 3 の等差数列であるため、

$$\begin{aligned} a_n &= 6 + 3(n-1) \\ &= 3n + 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = 3n + 3$

(4)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 3n \\ &= \frac{3}{2} n(n+3) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S_n &= 510 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} n(n+3) &= 510 \\ \Leftrightarrow n(n+3) &= 340 \\ \Leftrightarrow (n+20)(n-17) &= 0 \end{aligned}$$

となり、 n は自然数であるから、

$$n = 17$$

とわかる。

(答) $n = 17$

3

(1)

題意より,

$$\angle AOB = 2\pi \cdot \frac{1}{10} = \frac{\pi}{5}$$

である。また、 $OA = OB$ であるから,

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) = \frac{2\pi}{5}$$

である。また、 AC は $\angle OAB$ の二等分線であるから,

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \angle OAB = \frac{\pi}{5}$$

である。以上より,

$$\begin{cases} \angle BAC = \angle AOB = \frac{\pi}{5} \\ \angle ABC = \angle OAB = \frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

とわかり、二角相等より,

$$\triangle ABC \sim \triangle OAB$$

である。

(証明終)

(2)

$AB = x$ とおくと,

$$\begin{aligned} AB : AC &= OA : OB \\ \Leftrightarrow x : AC &= 1 : 1 \\ \Leftrightarrow AC &= x \end{aligned}$$

である。同様に,

$$\begin{aligned} AB : BC &= OA : AB \\ \Leftrightarrow x : BC &= 1 : x \\ \Leftrightarrow BC &= x^2 \end{aligned}$$

である。また、 $\angle CAO = \angle COA = \frac{\pi}{5}$ であるから,

$$CO = AC = x$$

とわかる。よって,

$$\begin{aligned} BO &= BC + CO \\ \Leftrightarrow 1 &= x^2 + x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となり、 $x > 0$ であるから,

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

となる。

(答) $AB = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

(3)

$\triangle ABO$ において余弦定理より,

$$\begin{aligned} \cos \angle ABO &= \frac{AB^2 + BO^2 - AO^2}{2 \cdot AB \cdot BO} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{5} &= \frac{x^2 + 1^2 - 1^2}{2 \cdot x \cdot 1} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{5} &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

(4)

題意の正五角形の隣り合う頂点を P, Q とし、円の中心を O とする。このとき,

$$\angle POQ = 2\pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

である。 $\triangle OPQ$ において余弦定理を用い,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos \angle POQ \\ &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

とわかる。よって、 $PQ > 0$ であるから,

$$PQ = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

である。

(答) $\frac{1}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

(1)(i)

条件より,

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

である。極大値, 極小値の条件より,

$$\alpha < \beta$$

かつ

$$f'(\alpha) = 3\alpha^2 + 2a\alpha + b = 0$$

$$f'(\beta) = 3\beta^2 + 2a\beta + b = 0$$

である。よって, α, β は x の 2 次方程式 $3x^2 + 2ax + b = 0$ の 2 実数解となるから, 解と係数の関係から,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{2}{3}a \\ \alpha\beta = \frac{b}{3} \end{cases}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{3}b \end{aligned}$$

となり, $\beta - \alpha > 0$ であるから,

$$\beta - \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \beta - \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$$

(ii)

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right)f'(x) + \frac{2}{9}(3b - a^2)x - \frac{1}{9}ab$$

と表すことができる。よって,

$$f(\alpha) = \frac{2}{9}(3b - a^2)\alpha - \frac{1}{9}ab$$

$$f(\beta) = \frac{2}{9}(3b - a^2)\beta - \frac{1}{9}ab$$

となり, $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ と (i) より, a と b の関係は,

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{9}(3b - a^2)(\alpha - \beta) &= 4 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}} &= 27 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3b &= 9 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad a^2 - 3b = 9$$

(2)(i)

求める接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x - t) + f(t) \\ \Leftrightarrow y &= (3t^2 + 2at + b)(x - t) + t^3 + at^2 + bt \\ \Leftrightarrow y &= (3t^2 + 2at + b)x - 2t^3 - at^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (3t^2 + 2at + b)x - 2t^3 - at^2$$

(ii)

接線は, $(x, y) = (0, 8)$ を通るから, (i) で求めた式に代入した

$$\begin{aligned} 8 &= (3t^2 + 2at + b) \cdot 0 - 2t^3 - at^2 \\ \Leftrightarrow 2t^3 + at^2 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。1 つの接点に対して, それぞれ異なる接線が 1 本ずつ対応するから, 題意を満たすとき, 上式が異なる 2 つの実数解 (1 つの実数解と, それと異なる重解) をもてばよい。2

解を p, q とおく ($t = q$ は重解) と,

$$\begin{aligned} 2t^3 + 8 + at^2 &= 2(t - p)(t - q)^2 \\ &= 2t^3 - 2(p + 2q)t^2 + 2(2pq + q^2)t - 2pq^2 \end{aligned}$$

と表せるから, 係数を比較して,

$$\begin{cases} a = -2(p + 2q) \\ 0 = 2(2pq + q^2) \\ 8 = -2pq^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ q = 2 \\ a = -6 \end{cases}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad a = -6$$

(3)

(1) で求めた $a^2 - 3b = 9$ に, $a = -6$ を代入して,

$$\begin{aligned} (-6)^2 - 3b &= 9 \\ \Leftrightarrow b &= 9 \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} 2t^3 - 6t^2 + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 2)^2(t + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 2, -1 \end{aligned}$$

より接点は, $(2, f(2)), (-1, f(-1))$ であるため, 求める接線は, $t = 2$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (12 - 24 + 9)x - 16 + 24 \\ \Leftrightarrow y &= -3x + 8 \end{aligned}$$

 $t = -1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (3 + 12 + 9)x + 2 + 6 \\ \Leftrightarrow y &= 24x + 8 \end{aligned}$$

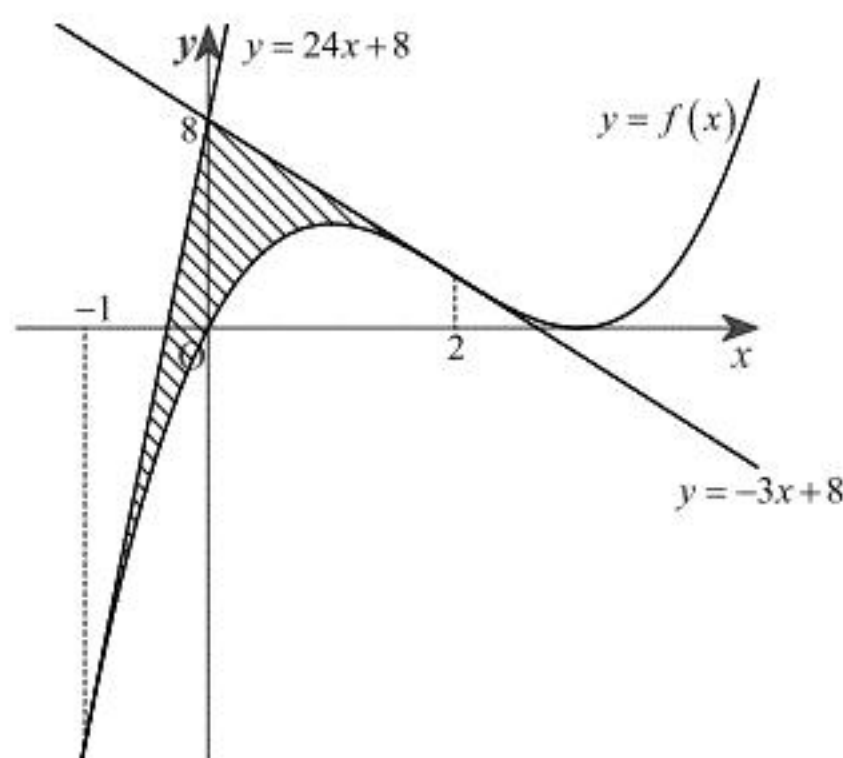
である。

$$(\text{答}) \quad y = -3x + 8, y = 24x + 8$$

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ &= x(x - 3)^2 \end{aligned}$$

である。また, 面積を求める領域は以下の斜線部である。



よって, 求める面積は,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 \{(24x + 8) - f(x)\} dx + \int_0^2 \{(-3x + 8) - f(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 \{-(x + 1)^2(x - 8)\} dx + \int_0^2 \{(-x - 2)^3\} dx \\ &= \frac{11}{4} + 4 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{4}$$