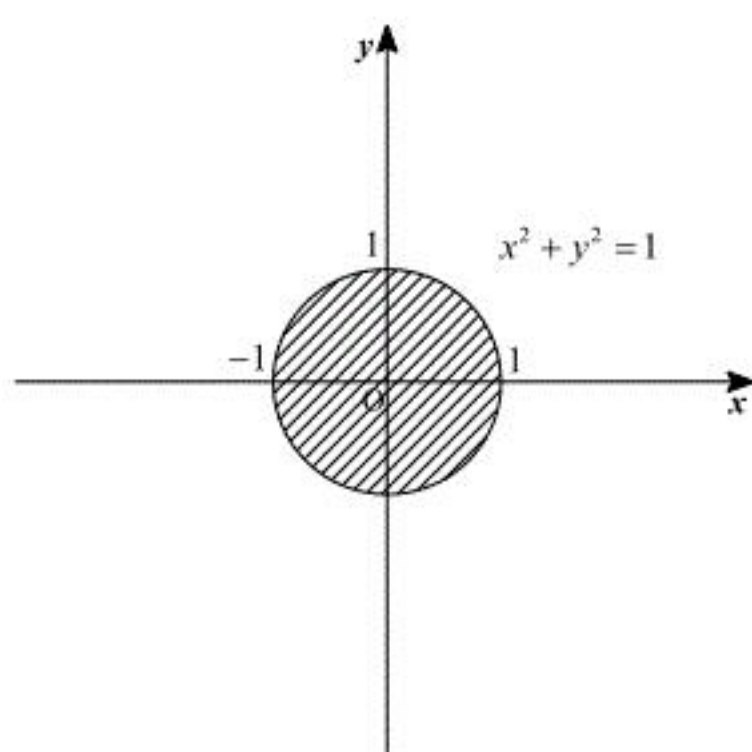


1

(1)

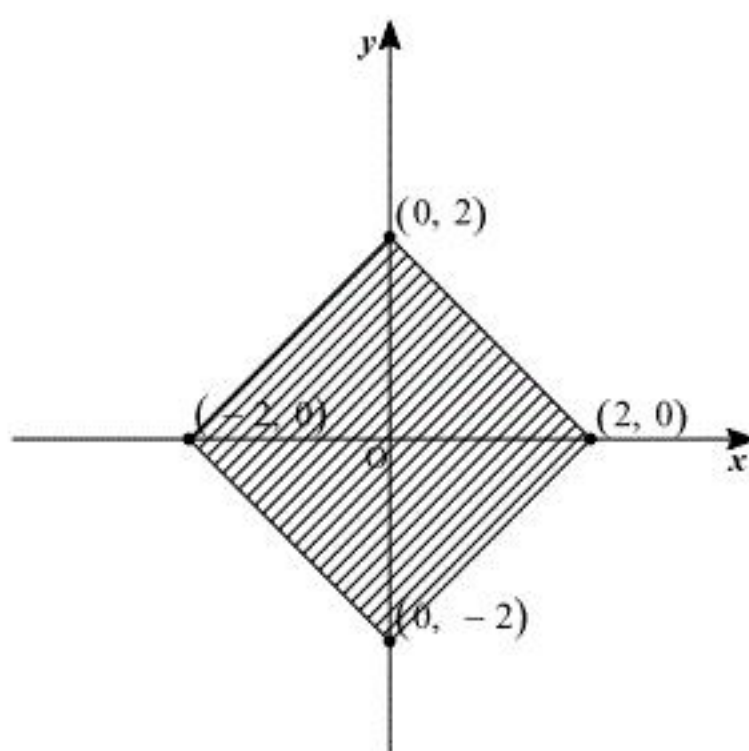
$x^2 + y^2 < 1$ は中心が原点，半径が1の円の内部であるから，求める領域は下の図のようになる。



(答) 前図(但し，境界線を含まない)

(2)

求める領域は， x 軸， y 軸対称であるから， $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ について考えると，不等式は， $x + y < 2$ ($x \geq 0$ ， $y \geq 0$)となる。したがって，対称性を考慮すると求める領域は下の図のようになる。



(答) 前図(但し，境界線を含まない)

(3)

$$x^2 + y^2 < 5$$

$$\Leftrightarrow y^2 < 5 - x^2$$

となる。ここで， y は実数であるから，

$$0 \leq y^2 < 5 - x^2$$

である。つまり，

$$0 < 5 - x^2$$

$$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

とわかり， $\sqrt{5} < 3$ であるから，

$$|x| < 3$$

が証明された。 y についても同様に， $|y| < 3$ である。以上より，題意を示せた。

(証明終)

(4)

与式の両辺を2乗したものの大小を比べると

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - (|x| + |y|)^2 \\ &= 4(x^2 + y^2) - (x^2 + 2|x||y| + y^2) \\ &= 2(x^2 + y^2) + (x^2 - 2|x||y| + y^2) \\ &= 2(x^2 + y^2) + (|x| - |y|)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より，

$$(|x| + |y|)^2 \leq \left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$

とわかる。 $|x| + |y| \geq 0$ ， $2\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ であるから，

$$|x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

が証明された。

(証明終)

(1)

題意より,

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \end{cases}$$

であるから, a_1 は,

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1 - 1 \\ \Leftrightarrow a_1^2 - a_1 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_1 - 2)(a_1 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $a_1 > 0$ であるため,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ S_1 &= 2 \end{aligned}$$

である。 a_2 は,

$$\begin{aligned} a_2 &= S_2 - S_1 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \left(\frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}a_2 - 1 \right) - 2 \\ \Leftrightarrow a_2^2 - a_2 - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_2 - 3)(a_2 + 2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $a_2 > 0$ であるため,

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 \\ S_2 &= S_1 + 3 = 5 \end{aligned}$$

である。 a_3 は,

$$\begin{aligned} a_3 &= S_3 - S_2 \\ \Leftrightarrow a_3 &= \left(\frac{1}{2}a_3^2 + \frac{1}{2}a_3 - 1 \right) - 5 \\ \Leftrightarrow a_3^2 - a_3 - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_3 - 4)(a_3 + 3) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $a_3 > 0$ であるため,

$$a_3 = 4$$

である。

(答) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$

(2)

 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるため,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1} - 1 \right) - \left(\frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n - 1 \right) \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_{n+1} - (a_n^2 + a_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1 \pm |2a_n + 1|}{2} \end{aligned}$$

となる。 $a_n > 0$ であるため,

$$a_{n+1} = a_n + 1$$

である。

(答) $a_{n+1} = a_n + 1$

(3)

(1), (2)より a_n は初項 2, 公差 1 の等差数列であるため,

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \\ &= n+1 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = n+1$

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{より,}$$

$$A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+3b \\ 4c+3d \end{pmatrix}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} 4a+3b \\ 4c+3d \end{pmatrix}$$

(2)

C 上の点として、点 $(0, 5)$ が存在する。この点についても題意が成立する。 $c=0$ のとき、

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5b \\ 5d \end{pmatrix}$$

である。よって、 $(5b, 5d)$ が $9x^2 - 16y^2 = 0$ 上にあるから、

$$\begin{aligned} 9 \cdot (5b)^2 - 16 \cdot (5d)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{4}{3}d \end{aligned}$$

となることが必要である。また、 $b = \frac{4}{3}d$ のとき、 C 上の点を (p, q) とすると、

$$A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + \frac{4}{3}dq \\ dq \end{pmatrix}$$

となる。ここでも、 $\left(ap + \frac{4}{3}dq, dq\right)$ が $9x^2 - 16y^2 = 0$ 上にあるから、

$$\begin{aligned} 9 \cdot \left(ap + \frac{4}{3}dq\right)^2 - 16 \cdot (dq)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a(9ap^2 + 24dpq) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。 C 上の点 (p, q) に対して常に上式が成り立つためには $a=0$ となることも必要で

ある。逆に、 $a=0, b = \frac{4}{3}d$ のときは

$$A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}dq \\ dq \end{pmatrix}$$

であり、 C 上の点 (p, q) に対して常に

$$9 \left(\frac{4}{3}dq \right)^2 - 16(dq)^2 = 0$$

が成り立つから、十分性も満たされる。以上より

$$b = \frac{4}{3}d$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{4}{3}d$$

(3)

(2)で求めた

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3}d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

が $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たすとする、

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3}d \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4d \\ 3d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow d &= 1 \end{aligned}$$

である。よって、求める A の1つは、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

としてよい。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)

部分積分を用いると積分定数 C を用いて

$$\begin{aligned}\int \log(1+x) dx &= \int (1+x)' \log(1+x) dx \\ &= (1+x) \log(1+x) - \int 1 dx \\ &= (1+x) \log(1+x) - (1+x+C) \\ &= (1+x) \{ \log(1+x) - 1 \} + C\end{aligned}$$

と変形できる。

$$(\text{答}) \quad (1+x) \{ \log(1+x) - 1 \} + C \quad (C: \text{積分定数})$$

(2)

$f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で連続増加関数であり、 $f(x) \geq 0$ であるから、面積を考えると、

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つ。両辺それぞれ $k=1, 2, \dots, n$ において足し合わせると

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &\leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。同様に、

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \geq \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

であるから、両辺それぞれ $k=1, 2, \dots, n$ において足し合わせると

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &\geq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \\ \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{n} \left\{ f(0) - f\left(\frac{n}{n}\right) + \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx &\leq \frac{1}{n} \{ f(1) - f(0) \}\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。以上より、

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \{ f(1) - f(0) \}$$

が示せた。

(証明終)

(3)

$f(x) = \log(1+x)$ より

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

である。よって、区間 $(0, 1)$ において $f'(x) > 0$ 、 $f(0) = 0$ であるから、 $f(x) \geq 0$ となる。したがって、(2)より、

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \{ f(1) - f(0) \} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \log(1+x) dx &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 \log(1+x) dx + \frac{1}{n} \log 2\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}\end{aligned}$$

である。また(1)より、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \log(1+x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1+x) \{ (1+x) \{ \log(1+x) - 1 \} \} \right]_0^1 \\ &= 2 \log 2 - 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 \log(1+x) dx + \frac{1}{n} \log 2 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \log 2 - 1 + \frac{1}{n} \log 2 \right) \\ &= 2 \log 2 - 1\end{aligned}$$

となる。以上より、はさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} \right] = 2 \log 2 - 1$$

とわかる。

(答) $2 \log 2 - 1$