

1

(1)

$f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6 \\ &= 3(x^2 - 2) \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。したがって増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで

$$f(-\sqrt{2}) = 3 + 4\sqrt{2}$$

および

$$f(\sqrt{2}) = 3 - 4\sqrt{2}$$

より、 $A(-\sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2})$ 、 $B(\sqrt{2}, 3 - 4\sqrt{2})$ となる。

$$(\text{答}) \quad A(-\sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2}), \quad B(\sqrt{2}, 3 - 4\sqrt{2})$$

(2)

点Cは線分ABの中点であるから、その座標は

$$\left(\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}, \frac{3 + 4\sqrt{2} + 3 - 4\sqrt{2}}{2} \right) = (0, 3)$$

と求まる。また、 $f(0) = 3$ であるから、点C(0, 3)は $y = f(x)$ 上にある。

(証明終)

(答) C(0, 3)

(3)

座標 $(x, f(x))$ のCに関して点対称である座標は $(0 - (x - 0), 3 - (f(x) - 3))$ すなわち

$(-x, 6 - f(x))$ である。したがって題意を示すには $f(-x) = 6 - f(x)$ を示せばよい。ここで

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x^3 + 6x + 3 \\ 6 - f(x) &= -x^3 + 6x + 3 \end{aligned}$$

であるから、題意は示された。

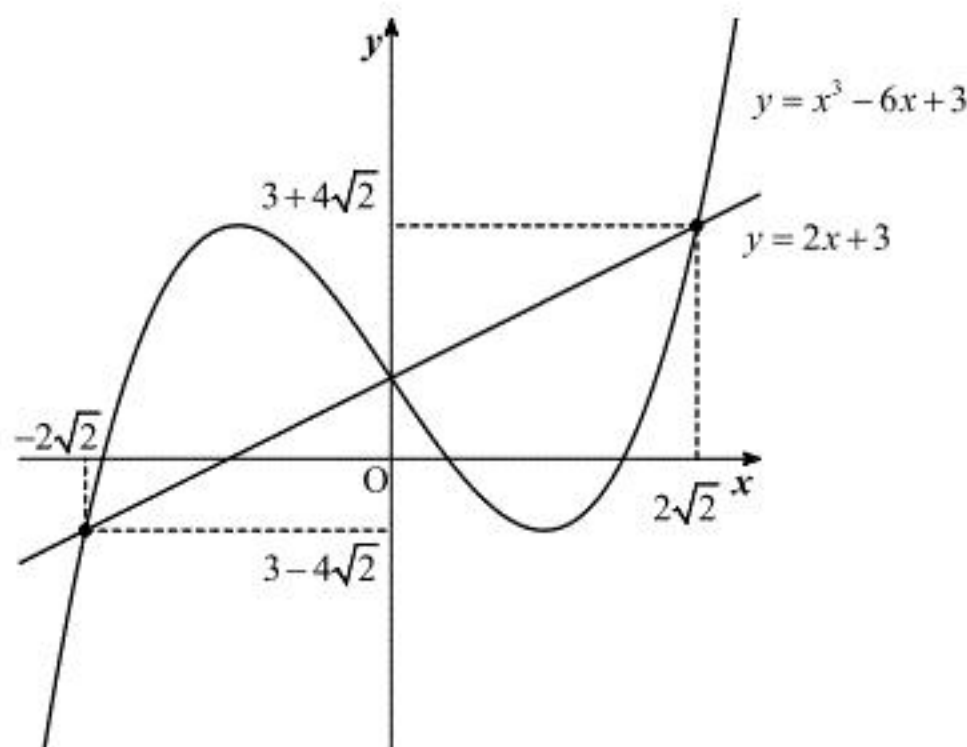
(証明終)

(4)

Cを通り傾きが2の直線は $y = 2x + 3$ となる。これと $y = f(x)$ の交点のx座標は、

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= x^3 - 6x + 3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 8x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となるので、 $y = f(x)$ と $y = 2x + 3$ の位置関係は以下のようになる。



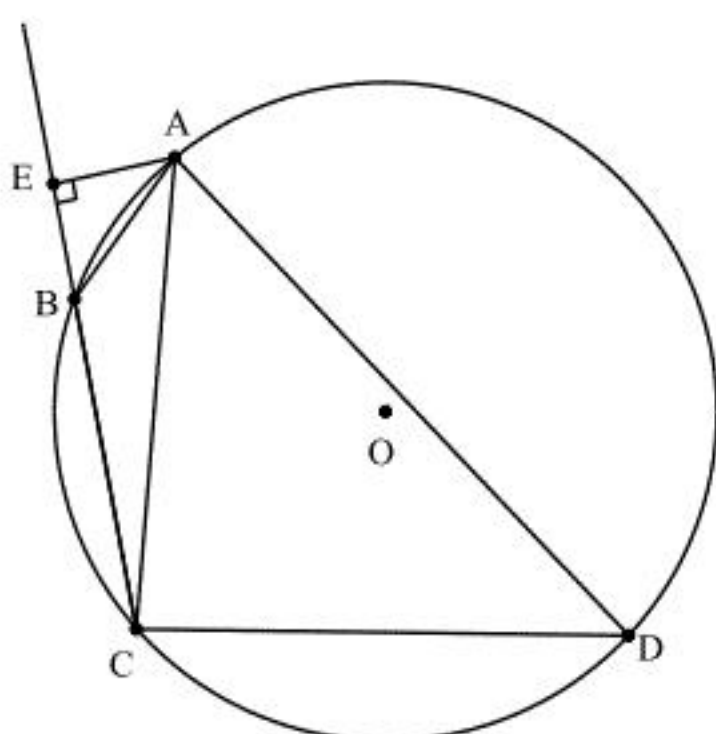
従って $y = f(x)$ と $y = 2x + 3$ がどちらもCに関して点対称であることから、求める面積は

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left\{ (2x + 3) - (x^3 - 6x + 3) \right\} dx &= 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + 4x^2 \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= 2(-16 + 32) \\ &= 32 \end{aligned}$$

となる。

(答) 32

(1)



$\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \\ &= 5 - 4\cos \angle ABC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle CDA \\ &= 25 - 24\cos \angle CDA \end{aligned}$$

となる。ここで、四角形 $ABCD$ は円に内接しているので、 $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ である。したがって、 $\cos \angle CDA = -\cos \angle ABC$ がいえるので、 $AC^2 = 25 + 24\cos \angle ABC$ となる。よって、

$$\begin{aligned} 5 - 4\cos \angle ABC &= 25 + 24\cos \angle ABC \\ \Leftrightarrow \cos \angle ABC &= -\frac{5}{7} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 5 - 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) \\ &= \frac{55}{7} \end{aligned}$$

より $AC = \sqrt{\frac{55}{7}}$ となる。

$$\text{(答)} \quad AC = \sqrt{\frac{55}{7}}$$

(2)

$$\cos^2 \angle ABC + \sin^2 \angle ABC = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \angle ABC = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad (\because 0^\circ < \angle ABC < 180^\circ)$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

(3)

$$\begin{aligned} AE &= AB \sin \angle ABE \\ &= AB \sin (180^\circ - \angle ABC) \\ &= AB \sin \angle ABC \\ &= 1 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{7} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad AE = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

(4)

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= BC \cdot AE \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{7} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= BC \cdot CA \cdot \sin \angle ACB \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{6}}{7} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{55}{7}} \cdot \sin \angle ACB \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \angle ACB &= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{385}} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \sin \angle ACB = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{385}}$$

(5)

四角形 $ABCD$ の面積は、三角形 ABC の面積と三角形 ADC の面積の和である。三角形 ABC の面積は(4)で求めた通り $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ である。三角形 ADC の面積は、

$$\begin{aligned} CD \cdot DA \cdot \sin \angle CDA \cdot \frac{1}{2} &= 3 \cdot 4 \cdot \sin \angle ABC \cdot \frac{1}{2} \\ &= 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} \\ &= \frac{12\sqrt{6}}{7} \end{aligned}$$

となる。よって四角形 $ABCD$ の面積は、

$$\frac{2\sqrt{6}}{7} + \frac{12\sqrt{6}}{7} = 2\sqrt{6}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 2\sqrt{6}$$

(1)

$$x^2 + y^2 + 4x + 2\sqrt{2}y + 3 = 0$$

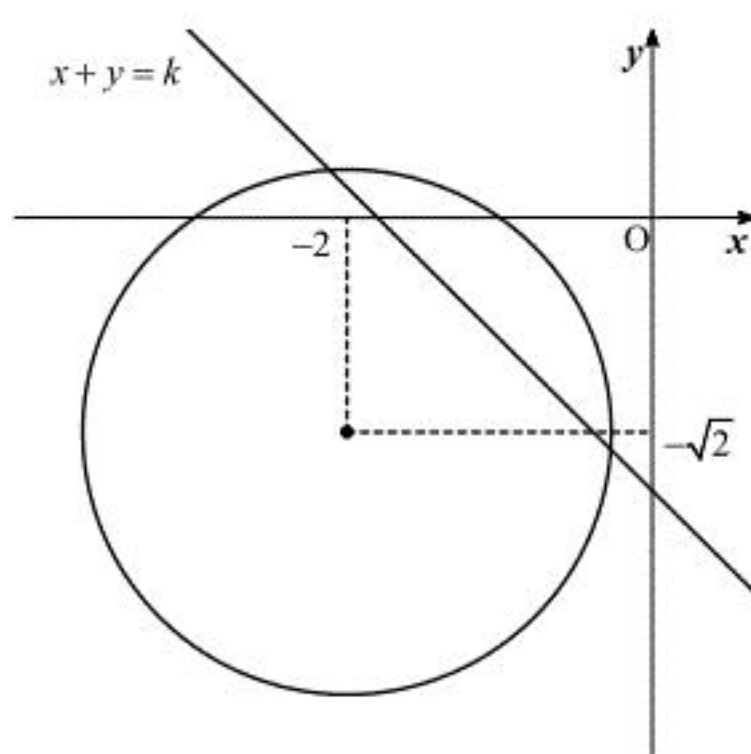
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+\sqrt{2})^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+\sqrt{2})^2 = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

より、中心は $(-2, -\sqrt{2})$ 、半径は $\sqrt{3}$ である。

(答) 中心 $(-2, -\sqrt{2})$ 、半径 $\sqrt{3}$

(2)



$x+y=k$ とおき、 k の最大値と最小値を求める。①かつ $x+y=k$ となる (x, y) が存在するとき、直線 $x+y=k$ のグラフと円のグラフに共有点がある、つまり直線 $x+y=k$ と円の中心

$(-2, -\sqrt{2})$ との距離が $\sqrt{3}$ 以下である。直線 $x+y=k$ と円の中心 $(-2, -\sqrt{2})$ との距離を d と

おくと、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned} d &= \frac{|-2-\sqrt{2}-k|}{\sqrt{1+1}} \\ &= \frac{|-2-\sqrt{2}-k|}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となるので、

$$d \leq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |-2-\sqrt{2}-k| \leq \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq -2-\sqrt{2}-k \leq \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow -2-\sqrt{2}-\sqrt{6} \leq k \leq -2-\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

となる。よって $x+y$ の最大値は $-2-\sqrt{2}+\sqrt{6}$ 、最小値は $-2-\sqrt{2}-\sqrt{6}$ となる。

(答) 最大値 $-2-\sqrt{2}+\sqrt{6}$ 、最小値 $-2-\sqrt{2}-\sqrt{6}$

(3)

x と y がともに有理数のとき、 $x+2$ も有理数なので、 $(x+2)^2$ も有理数である。したがって、

$$(x+2)^2 + (y+\sqrt{2})^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (y+\sqrt{2})^2 = 3 - (x+2)^2$$

より $(y+\sqrt{2})^2$ が有理数となる。

$$(y+\sqrt{2})^2 = y^2 + 2 + 2\sqrt{2}y$$

であり、 y は有理数なので $y^2 + 2$ も有理数である。従って $2\sqrt{2}y$ も有理数であるから $y=0$ となる。このとき、

$$(x+2)^2 + (y+\sqrt{2})^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + \sqrt{2}^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1, -3$$

となるので、求める点は $(-1, 0)$ と $(-3, 0)$ である。

(答) $(-1, 0)$ 、 $(-3, 0)$

(1)

 $n \geq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

および

$$S_{n-1} = a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

より,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから、①は $n=1$ の場合も成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (4n+1) - (4n-3) \\ &= 4 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{a_n\}$ は初項1, 公差4の等差数列である。

(証明終)

(答) 初項:1, 公差:4

(2)

 $b_n = a_{2n}$ とおくと, 求める値は $\sum_{k=1}^n b_k$ となり,

$$\begin{aligned} b_n &= 4 \cdot 2n - 3 \\ &= 8n - 3 \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n \\ &= 4n^2 + n \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $4n^2 + n$

(3)

 $c_n = (-1)^{2n-1} a_{2n-1} + (-1)^{2n} a_{2n}$ とおくと, 求める値は $\sum_{k=1}^n c_k$ となり,

$$\begin{aligned} c_n &= (-1)^{2n-1} a_{2n-1} + (-1)^{2n} a_{2n} \\ &= -a_{2n-1} + a_{2n} \\ &= -(8n-7) + (8n-3) \\ &= 4 \end{aligned}$$

なので,

$$\sum_{k=1}^n c_k = 4n$$

と求まる。

(答) $4n$

(4)

 $d_n = (-1)^{2n} S_{2n-1} + (-1)^{2n+1} S_{2n}$ とおくと, $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} S_i = \sum_{k=1}^n d_k$ となり,

$$\begin{aligned} d_n &= (-1)^{2n} S_{2n-1} + (-1)^{2n+1} S_{2n} \\ &= S_{2n-1} - S_{2n} \\ &= -a_{2n} \\ &= 3 - 8n \end{aligned}$$

となるので,

$$\sum_{k=1}^n (3 - 8k) \leq -5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が任意の n で成り立てばよい。 $k \geq 1$ において $3 - 8k < 0$ であることから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3 - 8k) &= -5 + \sum_{k=2}^n (3 - 8k) \\ &\leq -5 \end{aligned}$$

となり, ②は成り立つ。以上より, 任意の n で $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} S_i \leq -5$ が成り立つ。

(証明終)