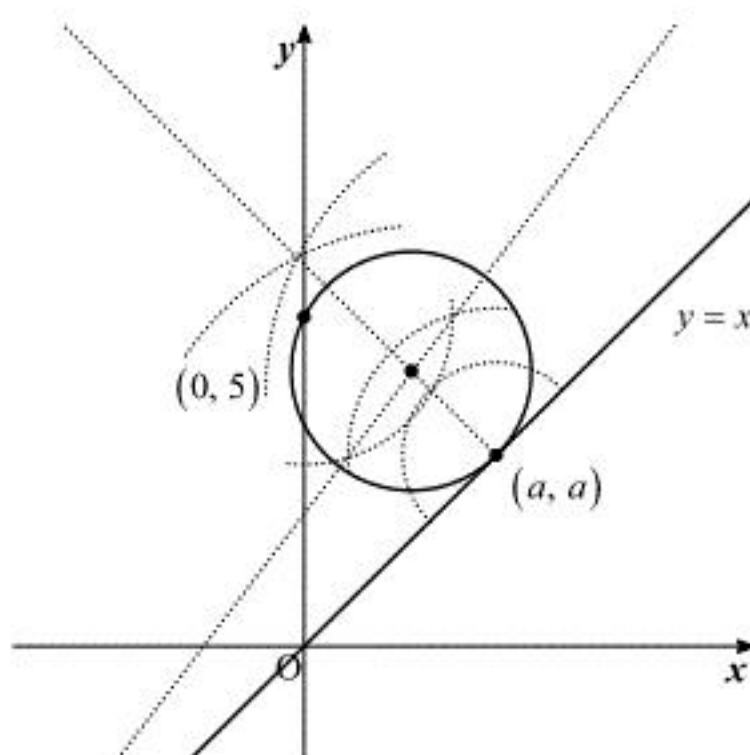


(1)

円 C は直線 $y=x$ に接しているため、円 C の中心は点 (a, a) を通る直線 $y=x$ の垂線上にある。
 また、点 $(0, 5)$ と点 (a, a) を通ることから、この 2 点の垂直二等分線上に円 C の中心がある。
 従って、下図のように、点 (a, a) から直線 $y=x$ に垂直に引いた直線と、点 $(0, 5)$ と点 (a, a) の垂直二等分線を引き、その交点を中心に点 $(0, 5)$ を通るように半径を定めて円を描けばよい。



(答) 前図

(2)

点 (a, a) から直線 $y=x$ に垂直に引いた直線は、傾きが -1 なので、直線の式は

$$y-a=-1(x-a) \\ \Leftrightarrow y=-x+2a$$

となる。したがって、円 C の中心の点は $(x, -x+2a)$ と表せる。この点から点 (a, a) までの距離は

$$\sqrt{(x-a)^2 + (-x+2a-a)^2} = \sqrt{2}|a-x|$$

であり、点 $(x, -x+2a)$ から点 $(0, 5)$ までの距離は

$$\sqrt{x^2 + (-x+2a-5)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x(5-2a) + (5-2a)^2}$$

である。これらの距離が等しいので、

$$\begin{aligned} \sqrt{2}|a-x| &= \sqrt{2x^2 + 2x(5-2a) + (5-2a)^2} \\ \Leftrightarrow 2(a-x)^2 &= 2x^2 + 2x(5-2a) + (5-2a)^2 \\ \Leftrightarrow 10x &= -2a^2 + 20a - 25 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2a^2 + 20a - 25}{10} \end{aligned}$$

となる。したがって、円 C の中心の点は $\left(\frac{-2a^2 + 20a - 25}{10}, \frac{2a^2 + 25}{10}\right)$ であり、半径は

$$\sqrt{2} \left| a - \frac{-2a^2 + 20a - 25}{10} \right| = \sqrt{2} \left| \frac{2a^2 - 10a + 25}{10} \right|$$

となるので、円 C の方程式は

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{-2a^2 + 20a - 25}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{2a^2 + 25}{10}\right)^2 &= \left\{ \sqrt{2} \left| \frac{2a^2 - 10a + 25}{10} \right| \right\}^2 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{-2a^2 + 20a - 25}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{2a^2 + 25}{10}\right)^2 &= \frac{(2a^2 - 10a + 25)^2}{50} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \left(x - \frac{-2a^2 + 20a - 25}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{2a^2 + 25}{10}\right)^2 = \frac{(2a^2 - 10a + 25)^2}{50}$$

(3)

x と y の値を求めると、

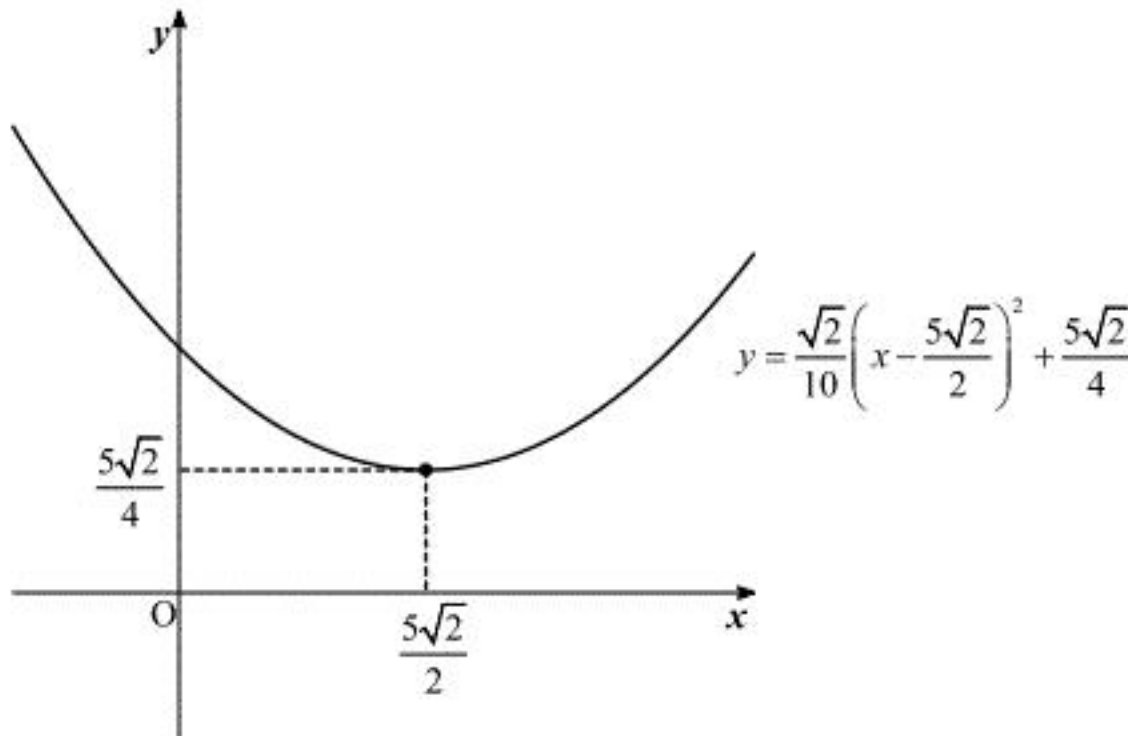
$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(s+t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{-2a^2 + 20a - 25}{10} + \frac{2a^2 + 25}{10} \right) \\ &= \sqrt{2}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-s+t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2a^2 - 20a + 25}{10} + \frac{2a^2 + 25}{10} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4a^2 - 20a + 50}{10} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{2a^2 - 10a + 25}{10} \right) \end{aligned}$$

となる。 $x = \sqrt{2}a \Leftrightarrow a = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので、

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2} \left(\frac{x^2 - 5\sqrt{2}x + 25}{10} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10} \left\{ \left(x - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10} \left(x - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。 a が実数全体を動くため、 x も実数全体を動く。したがって、以下の図のような頂点が $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$ の放物線となる。



(答) 前図

(1)

$$P_{n-1}P_n = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} P_0P_1 + P_1P_2 + \cdots + P_{n-1}P_n + \cdots &= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

となる。公比が $\frac{1}{2}$ $\left(0 < \frac{1}{2} < 1\right)$ であるため、この無限等比級数は収束し、

$$\begin{aligned} P_0P_1 + P_1P_2 + \cdots + P_{n-1}P_n + \cdots &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

(2)

図より、 P_n の座標は、 P_{n-1} と比べて x 座標は n が奇数の場合に $\frac{1}{2^{n-1}} \cos \theta$ だけ増加し、 n が偶

数の場合は $\frac{1}{2^{n-1}} \cos \theta$ だけ減少する。また、 y 座標は $\frac{1}{2^{n-1}} \sin \theta$ だけ増加する。よって

$P_n = (x, y)$ とおくと、 $P_0 = (0, 0)$ なので、

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{k-1}} \cos \theta \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(-2)^{k-1}} \cos \theta \\ &= \frac{1 - \frac{1}{(-2)^n}}{1 - \frac{1}{(-2)}} \cos \theta \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{(-2)^n} \right) \cos \theta \\ y &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \sin \theta \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \sin \theta \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

となるため、 $P_n = \left(\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{(-2)^n} \right) \cos \theta, 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \sin \theta \right)$ となる。

$$(答) \ P_n = \left(\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{(-2)^n} \right) \cos \theta, 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \sin \theta \right)$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-2)^n} = 0 \text{ および } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ より,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{(-2)^n} \right) \cos \theta = \frac{2}{3} \cos \theta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \sin \theta = 2 \sin \theta$$

がいえるので、求める点は $\left(\frac{2}{3} \cos \theta, 2 \sin \theta \right)$ である。

$$(答) \ \left(\frac{2}{3} \cos \theta, 2 \sin \theta \right)$$

(1)

$$\begin{aligned}
 3^{20} &= (3^2)^{10} \\
 &= 9^{10} \\
 &= (9^5)^2 \\
 &= 59049^2 \\
 &> (5 \cdot 10^4)^2 \\
 &= 2.5 \cdot 10^9 \\
 &> 10^9
 \end{aligned}$$

より $3^{20} > 10^9$ がいえる。また,

$$\begin{aligned}
 3^{25} &= (3^5)^5 \\
 &= 243^5 \\
 &< \left(\frac{1000}{4}\right)^5 \\
 &= \frac{10^{15}}{1024} \\
 &< \frac{10^{15}}{1000} \\
 &= 10^{12}
 \end{aligned}$$

より $3^{25} < 10^{12}$ がいえる。

(証明終)

(2)

(1)の結果の両辺を 10 を底とした対数をとって,

$$\begin{aligned}
 3^{20} &> 10^9 \\
 \Leftrightarrow \log_{10} 3^{20} &> 9 \\
 \Leftrightarrow 20 \log_{10} 3 &> 9 \\
 \Leftrightarrow \log_{10} 3 &> 0.45 \\
 \Leftrightarrow a &> 0.45
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3^{25} &< 10^{12} \\
 \Leftrightarrow \log_{10} 3^{25} &< 12 \\
 \Leftrightarrow 25 \log_{10} 3 &< 12 \\
 \Leftrightarrow \log_{10} 3 &< 0.48 \\
 \Leftrightarrow a &< 0.48
 \end{aligned}$$

となるため, $0.45 < a < 0.48$ がいえる。

(証明終)

(3)

$f(x) = 15x - x^2$ とおくと, $15x - x^2 = -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4}$ なので, $f(x)$ は $x < 7.5$ の範囲では単調増加である。したがって $f(0.45) < f(a) < f(0.48)$ が成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned}
 f(0.45) &= 15 \cdot 0.45 - 0.45^2 \\
 &= 6.75 - 0.2025 \\
 &= 6.5475
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(0.48) &= 15 \cdot 0.48 - 0.48^2 \\
 &= 7.2 - 0.2304 \\
 &= 6.9696
 \end{aligned}$$

となるので, $6.5475 < 15a - a^2 < 6.9696$ である。よって, $6.54 < 15a - a^2 < 6.97$ が成り立つ。

(証明終)

(4)

それぞれの式を x と y で平方完成すると,

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2(1+a)x + y^2 - 4(2-a)y + a^2 - 2a + 8 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \{x - (1+a)\}^2 + \{y - 2(2-a)\}^2 - 4a^2 + 12a - 9 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \{x - (1+a)\}^2 + \{y - 2(2-a)\}^2 &\leq (3-2a)^2
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6(2+a)x + y^2 - 2(3-a)y + 9a^2 + 38a + 29 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \{x - 3(2+a)\}^2 + \{y - (3-a)\}^2 - a^2 + 8a - 16 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \{x - 3(2+a)\}^2 + \{y - (3-a)\}^2 &\leq (4-a)^2
 \end{aligned}$$

となる。 $a < 1$ より $3-2a$ と $4-a$ は正の値なので, 2 つの式はそれぞれ点 $(1+a, 2(2-a))$ を中心

とした半径 $3-2a$ の円の内部と点 $(3(2+a), 3-a)$ を中心とした半径 $4-a$ の円の内部(いずれ

も境界含む)を表す。したがって, 点 $(1+a, 2(2-a))$ と点 $(3(2+a), 3-a)$ の距離が 2 円の半径

の和より大きければ共有点をもたない, つまり 2 つの不等式をともに満たす実数の組 (x, y)

が存在しないことを表す。点 $(1+a, 2(2-a))$ と点 $(3(2+a), 3-a)$ の距離は,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\{3(2+a) - (1+a)\}^2 + \{(3-a) - 2(2-a)\}^2} &= \sqrt{(5+2a)^2 + (a-1)^2} \\
 &= \sqrt{5a^2 + 18a + 26}
 \end{aligned}$$

となり, 2 円の半径の和は

$$(3-2a) + (4-a) = 7-3a$$

となる。 $\sqrt{5a^2 + 18a + 26}$ と $7-3a$ はどちらも正の値なので, 2 乗しても大小関係は変わらない。

したがって, $(\sqrt{5a^2 + 18a + 26})^2$ と $(7-3a)^2$ の大小関係を比較する。

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{5a^2 + 18a + 26})^2 - (7-3a)^2 &= (5a^2 + 18a + 26) - (9a^2 - 42a + 49) \\
 &= -4a^2 + 60a - 23 \\
 &= 4(15a - a^2) - 23
 \end{aligned}$$

となる。ここで, (3)より $(15a - a^2) > 6.54$ なので

$$\begin{aligned}
 4(15a - a^2) &> 26.16 \\
 \Leftrightarrow 4(15a - a^2) - 23 &> 3.16
 \end{aligned}$$

となるため, $(\sqrt{5a^2 + 18a + 26})^2 > (7-3a)^2$, つまり $\sqrt{5a^2 + 18a + 26} > 7-3a$ がいえる。よって,

点 $(1+a, 2(2-a))$ と点 $(3(2+a), 3-a)$ の距離が 2 円の半径の和より大きいので, 2 つの不等式

をともに満たす実数の組 (x, y) が存在しない。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 e^{-9x} + x^3 \cdot (-9)e^{-9x} \\ &= 3x^2 e^{-9x} (1-3x) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = 3x^2 e^{-9x} (1-3x)$$

(2)

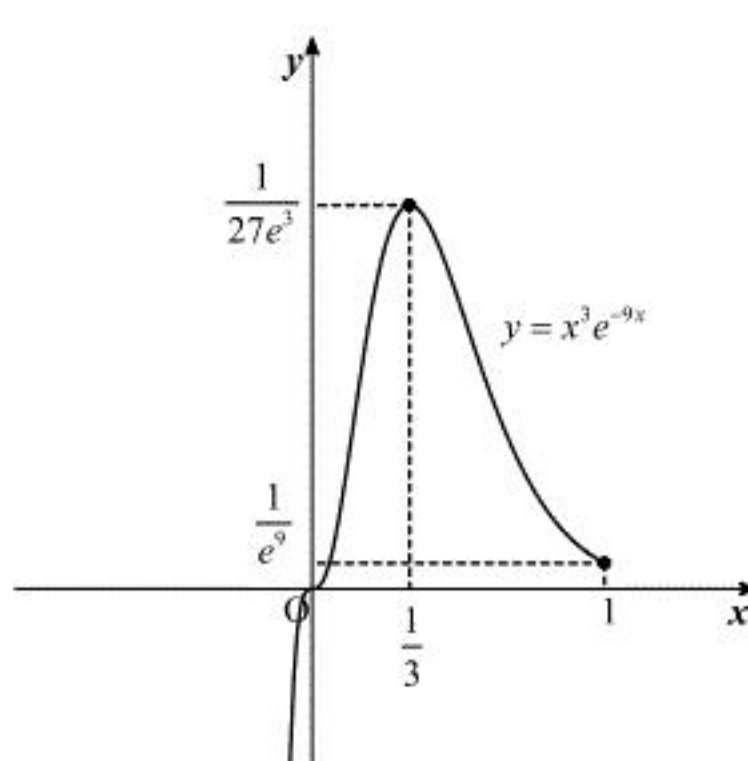
(1)より,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \frac{1}{3}$$

となる。また、 $f(0) = 0$ および $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27e^3}$ となるので、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{27e^3}$	$\searrow$

また、 $f(-1) = -e^9$ と $f(1) = \frac{1}{e^9}$ から、 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、 $f(x) = a$ をみたす実数の個数は

$$a < -e^9 \text{ および } \frac{1}{27e^3} < a \text{ のとき, } 0 \text{ 個}$$

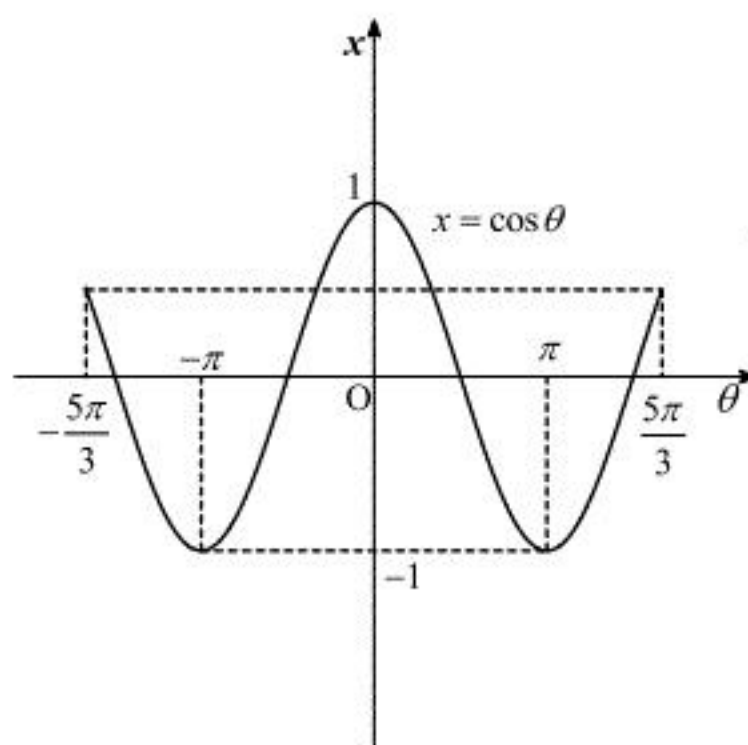
$$-e^9 \leq a < \frac{1}{e^9} \text{ および } a = \frac{1}{27e^3} \text{ のとき, } 1 \text{ 個}$$

$$\frac{1}{e^9} \leq a < \frac{1}{27e^3} \text{ のとき, } 2 \text{ 個}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} a < -e^9 \text{ および } \frac{1}{27e^3} < a \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ -e^9 \leq a < \frac{1}{e^9} \text{ および } a = \frac{1}{27e^3} \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ \frac{1}{e^9} \leq a < \frac{1}{27e^3} \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

(3)



まず $-\frac{5}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$ において 1 つの x の値に対応する θ の値の数を考える。上のグラフより、

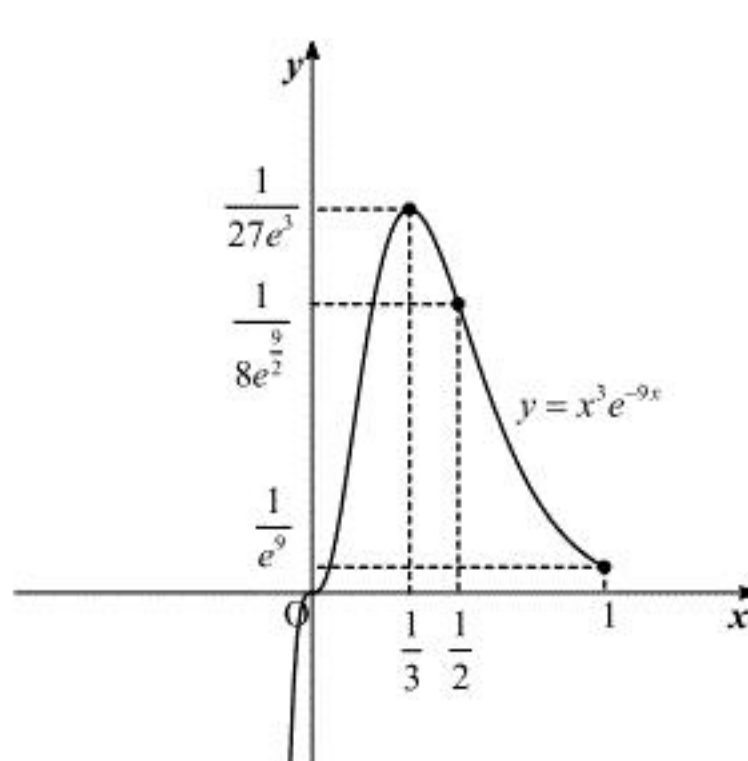
り、 $-\frac{5}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$ において $x = \cos \theta$ となる θ の数は、

$$x = 1 \text{ のとき, } 1 \text{ 個}$$

$$\frac{1}{2} < x < 1 \text{ および } x = -1 \text{ のとき, } 2 \text{ 個}$$

$$-1 < x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, } 4 \text{ 個}$$

である。(2)より $f(x) = a$ となる x は 0 個、1 個、2 個のいずれかだが、0 個のときは $f(\cos \theta) = a$ となる θ の数も 0 個であり、1 個の場合、 $f(\cos \theta) = a$ となる θ の数は高々 4 個である。よって $f(x) = a$ となる x が 2 個の場合しか $f(\cos \theta) = a$ となる θ の値が 6 つとなるケースはなく、その 2 つの x のうち 1 つは $\frac{1}{2} < x < 1$ または $x = -1$ で、もう 1 つは $-1 < x \leq \frac{1}{2}$ となる。ここで 2 つのケースについて考える。



[1] $x = -1$ のときに $f(x) = a$ となる場合

$f(-1) = -e^9$ より $a = -e^9$ だが、このとき $f(x) = a$ となる x が -1 しかないため、条件を満たさない。

[2] $\frac{1}{2} < x < 1$ の範囲内のある x で $f(x) = a$ となる場合

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8e^{\frac{9}{2}}}$$

であることと、 $x > \frac{1}{3}$ で $f(x)$ が単調減少であることから、

$$\frac{1}{e^9} < a < \frac{1}{8e^{\frac{9}{2}}}$$

である。このとき、上の $y = f(x)$ のグラフから、 $f(x) = a$ となるもう 1

つの x は $0 < x < \frac{1}{3}$ の範囲にある。従って、このとき 2 つの x のうち 1 つは $\frac{1}{2} < x < 1$ で、

もう 1 つは $-1 < x \leq \frac{1}{2}$ となり、条件を満たす。

以上[1], [2]より、題意を満たす a の範囲は、 $\frac{1}{e^9} < a < \frac{1}{8e^{\frac{9}{2}}}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{e^9} < a < \frac{1}{8e^{\frac{9}{2}}}$$