

1
(1)

$f(x) = (x - \cos \theta + \sin \theta)^2 + 2 \sin^2 \theta - 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \cos \theta + \sin \theta)^2 + 2 \sin^2 \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \cos \theta + \sin \theta)^2 &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \Leftrightarrow (x - \cos \theta + \sin \theta)^2 &= \cos 2\theta \qquad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。方程式 $f(x) = 0$ が実数解を持つとき、 $(x - \cos \theta + \sin \theta)^2 \geq 0$ であるから

$$\cos 2\theta \geq 0 \qquad \dots \textcircled{2}$$

でなければならない。よって、 $0 \leq \theta \leq \pi$ のもとで②を満たす θ の範囲は

$$\begin{aligned} 0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \leq 2\theta \leq 2\pi \\ \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \pi \qquad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \pi$$

(2)

方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつとき、つまり、③であるとき、その解は②より

$$\begin{aligned} (x - \cos \theta + \sin \theta)^2 &= \cos 2\theta \\ \Leftrightarrow x - \cos \theta + \sin \theta &= \pm \sqrt{\cos 2\theta} \\ \Leftrightarrow x &= \cos \theta - \sin \theta \pm \sqrt{\cos 2\theta} \end{aligned}$$

となる。これらの値を α, β とするとき

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2 \cos \theta - 2 \sin \theta \\ &= 2\sqrt{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

であり、③のとき

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}, \pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$$

であるから、 $\alpha + \beta$ は

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \text{つまり、}\theta = 0 \text{ のとき最大値 } 2$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \pi, \text{つまり、}\theta = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき最小値 } -2\sqrt{2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \text{最大値 } 2, \text{最小値 } -2\sqrt{2}$$

(3)

関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分が存在するのは、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 2 つの共有点を持つときであり、(1)の結果を利用して

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < \theta \leq \pi \qquad \dots \textcircled{4}$$

となる。このとき、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすれば、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \theta - \sin \theta - \sqrt{\cos 2\theta} \\ \beta &= \cos \theta - \sin \theta + \sqrt{\cos 2\theta} \end{aligned}$$

となり、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{\cos 2\theta})^3 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $S = \frac{\sqrt{2}}{3}$ となるとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(2\sqrt{\cos 2\theta})^3 &= \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{\cos 2\theta})^3 &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \cos 2\theta &= \frac{1}{2} \qquad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

である。④、つまり

$$0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < 2\theta \leq 2\pi$$

において⑤を満たす θ の値は

$$\begin{aligned} 2\theta &= \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

2

(1)

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角は $\frac{2}{3}\pi$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \\ &= -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

であり

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{FG} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \frac{1}{1+t}\overrightarrow{ED}\end{aligned}$$

であり

$$\overrightarrow{FE} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{ED} = \vec{a}$$

であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \vec{b} + (\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{1+t}\vec{a} \\ &= \frac{2+t}{1+t}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AH} = \frac{2+t}{1+t}\vec{a} + 2\vec{b}$

(4)

(2), (3)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AH} &= \left(\frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{2+t}{1+t}\vec{a} + 2\vec{b}\right) \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{2+t}{1+t} |\vec{a}|^2 + \left(\frac{4}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2+t}{1+t}\right) \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3} \cdot 2 |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{2+t}{1+t} \cdot 1^2 + \left(\frac{4}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2+t}{1+t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1^2 \\ &= \frac{-3t+2}{3t+3}\end{aligned}$$

となるから、 $\overrightarrow{FG}$ と $\overrightarrow{AH}$ が垂直に交わるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AH} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-3t+2}{3t+3} &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $t = \frac{2}{3}$

(5)

$t = \frac{2}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \frac{2+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}\vec{a} + 2\vec{b} \\ &= \frac{8}{5}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

となり、点 O は線分 AH 上の点であるから、実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= s\overrightarrow{AH} \\ &= \frac{8}{5}s\vec{a} + 2s\vec{b} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

と表すことができる。また、点 O は線分 FG 上の点であるから、実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FO} &= u\overrightarrow{FG} \\ &= \frac{4}{3}u\vec{a} - \frac{2}{3}u\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} \\ &= \frac{4}{3}u\vec{a} + \left(1 - \frac{2}{3}u\right)\vec{b} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は互いに一次独立なベクトルであるから、①、②より

$$\begin{cases} \frac{8}{5}s = \frac{4}{3}u \\ 2s = 1 - \frac{2}{3}u \end{cases}$$

となる。よって

$$s = \frac{5}{14}, u = \frac{3}{7}$$

となり、①より

$$\overrightarrow{AO} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}$

(6)

(5)の結果を用いて

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AO}|^2 &= \left|\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{16}{49}|\vec{a}|^2 + \frac{40}{49}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{25}{49}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{16}{49} + \frac{40}{49} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{25}{49} \\ &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AO}| = \frac{\sqrt{21}}{7} (> 0)$$

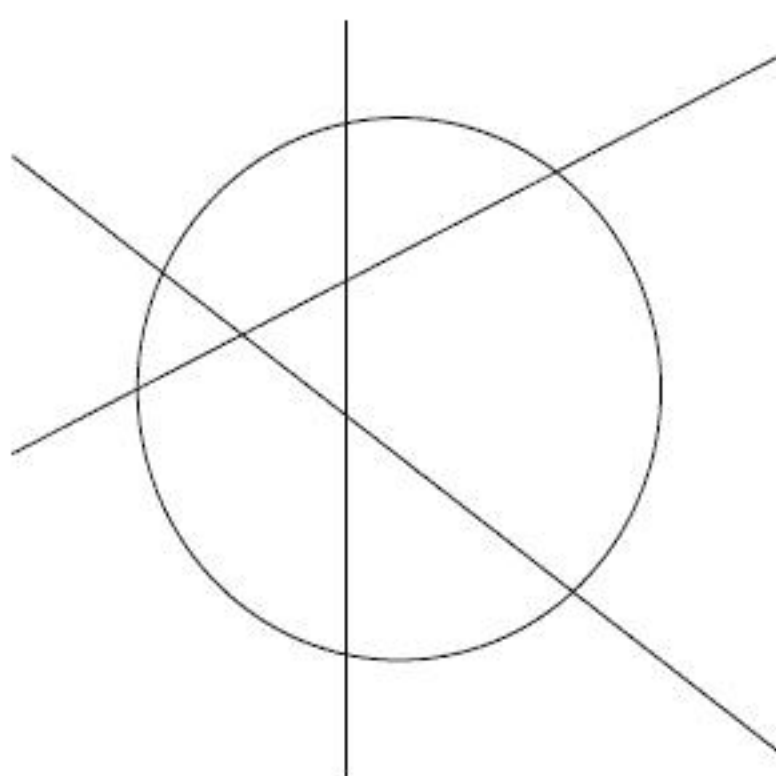
となる。

(答) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

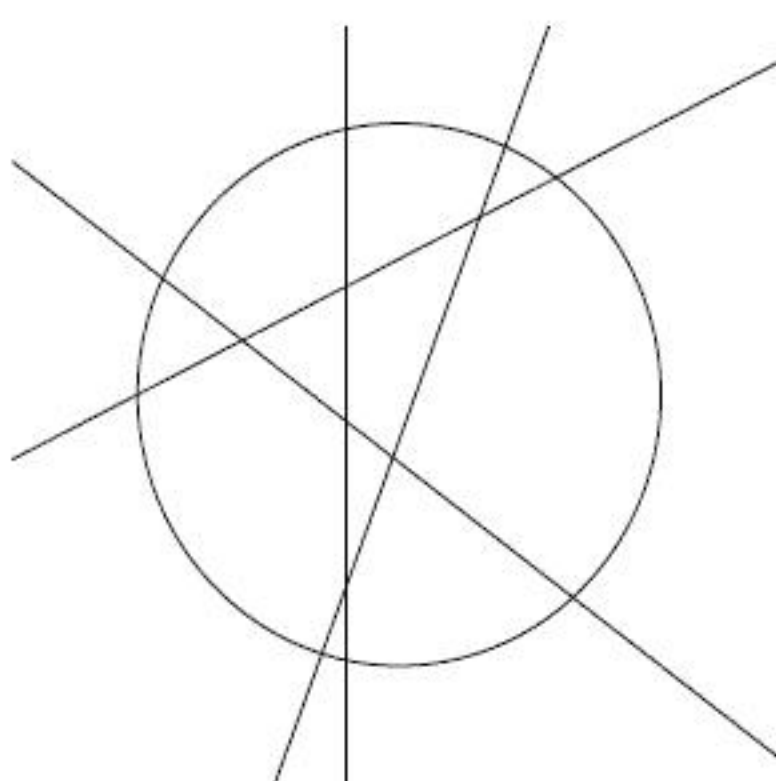
3

(1)

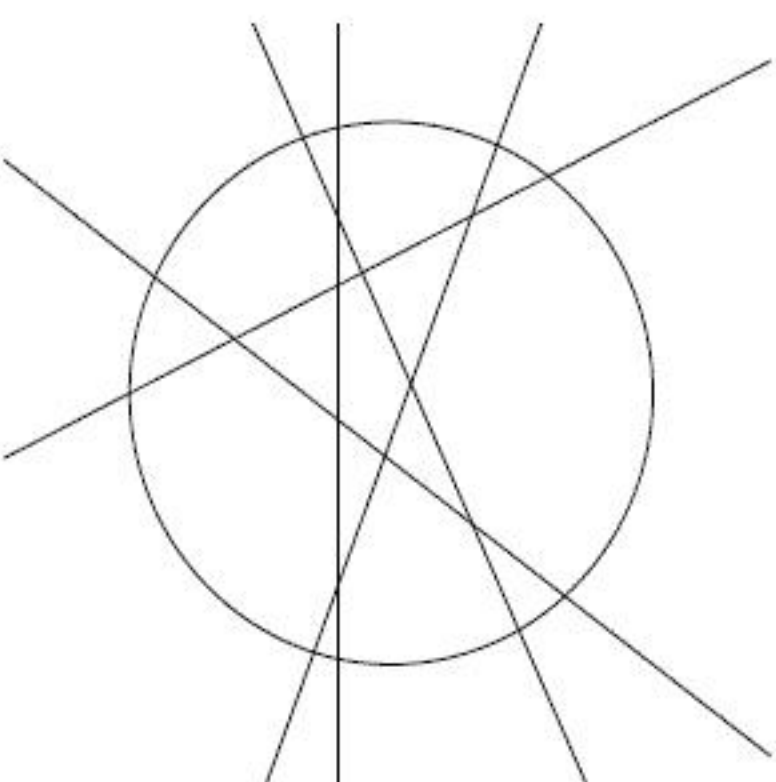
$n=3$ のとき、分割状態の例は以下の図のようになる。



前図での分割数は7であるから、 $a_3 \geq 7$ が示された。 $n=4$ のとき、分割状態の例は以下の図のようになる。



前図での分割数は11であるから、 $a_4 \geq 11$ が示された。 $n=5$ のとき、分割状態の例は以下の図のようになる。



前図での分割数は16であるから、 $a_5 \geq 16$ が示された。

(証明終)

(2)

$n+1$ 回目に新しく切ったとき分割数が最大になるのは、それまでの n 本の切り口のすべてと交差し、どの3本の切り口も1点で交わらない場合であるから、 $n+1$ 回目に新しく切ったときの切り口は $n+1$ 個の線分に分かれる。よって

$$p_{n+1} = n+1$$

となる。

(答) $p_{n+1} = n+1$

(3)

(1)の結果より

$$a_{n+1} = a_n + n+1$$

である。これより $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\ &= 2 + \frac{(n-1)n}{2} + n-1 \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n+1 \end{aligned}$$

となる。これは、 $n=1$ のときも $a_1=2$ を満たす。

(答) $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n+1$

(4)

100 片以上に分割されるような n の条件は

$$\begin{aligned} a_n &\geq 100 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n+1 &\geq 100 \\ \Leftrightarrow n^2 + n - 198 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow n \leq \frac{-1-\sqrt{793}}{2}, \frac{-1+\sqrt{793}}{2} \leq n &\quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} 28 &< \sqrt{793} < 29 \\ \Leftrightarrow \frac{27}{2} &< \frac{-1+\sqrt{793}}{2} < 14 \end{aligned}$$

であるから、①を満たす最小の自然数 n は14 となる。

(答) 14 回

4

(1)

 $f(x) = x(x-1)(x+1)$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1) \\ &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

であるから、 $f'(x) = 0$ のとき $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。これより、関数 $y = f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって、関数 $y = f(x)$ は

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき、極大値 } f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

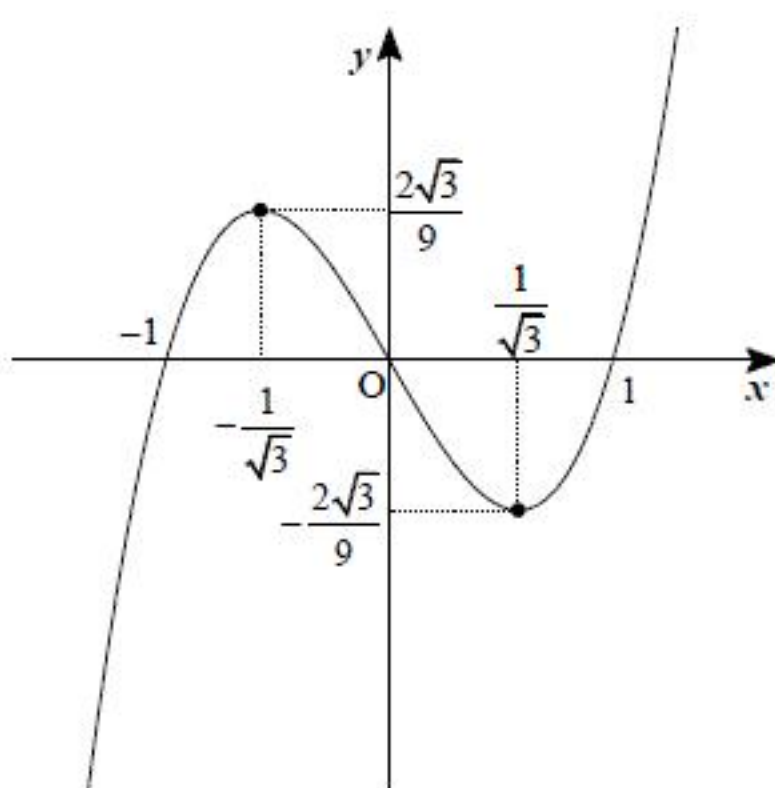
$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき、極小値 } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき極大値 } \frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき極小値 } -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

(2)

(1)の結果と、 $y = f(x)$ のグラフは $x = -1, 0, 1$ において x 軸と共有点をもつことより、 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(3)

点 $(x, f(x))$ と点 $(1, 0)$ の間の距離を d とおくと

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x-1)^2 + \{f(x)-0\}^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + x^2(x-1)^2(x+1)^2} \\ &= |x-1| \sqrt{1+x^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

となり、 x が $|x-1| < \frac{1}{2}$ を満たすとき

$$\begin{aligned} d &= |x-1| \sqrt{1+x^2(x+1)^2} \\ &< \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

である。また、 $g(x) = 1+x^2(x+1)^2$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x(x+1)^2 + 2x^2(x+1) \\ &= 2x(x+1)(2x+1) \end{aligned}$$

となる。 x が $|x-1| < \frac{1}{2}$ 、つまり、 $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ を満たすとき、 $g'(x) > 0$ となるから関数 $g(x)$ は単調増加関数であり

$$g(x) < g\left(\frac{3}{2}\right)$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} d &< \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2(x+1)^2} \\ &< \frac{1}{2} \sqrt{g\left(\frac{3}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{241}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{241}}{8} \end{aligned}$$

となるが、 $\sqrt{241} < 24$ であるから

$$d < 3$$

が $|x-1| < \frac{1}{2}$ を満たす x すべてにおいて成り立ち、点 $(x, f(x))$ は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 3 の円の内部に含まれることが示された。

(証明終)

(4)

点 $(x, f(x))$ と点 $(1, 0)$ の間の距離を d とおくと、(3)と同様にして

$$d = |x-1| \sqrt{1+x^2(x+1)^2}$$

となり、 x が $|x-1| < r$ を満たすとき

$$\begin{aligned} d &= |x-1| \sqrt{1+x^2(x+1)^2} \\ &< r \sqrt{1+x^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

である。 x が $|x-1| < r$ を満たすとき、 r が 1 以下の正の数であることに注意すると

$$(0 \leq) 1-r < x < 1+r \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $g(x) = 1+x^2(x+1)^2$ とおくと

$$g'(x) = 2x(x+1)(2x+1)$$

であり、①のとき $g'(x) > 0$ となるから関数 $g(x)$ は単調増加関数であり

$$g(x) < g(1+r) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 r が 1 以下の正の数であるから

$$1 < 1+r \leq 2 \Leftrightarrow 1 < (1+r)^2 \leq 4$$

$$2 < 2+r \leq 3 \Leftrightarrow 4 < (2+r)^2 \leq 9$$

が成り立ち、②より

$$\begin{aligned} g(x) &< g(1+r) \\ &= 1 + (1+r)^2(2+r)^2 \\ &\leq 1 + 4 \cdot 9 \\ &= 37 \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} d &< r \sqrt{1+x^2(x+1)^2} \\ &< r \sqrt{g(1+r)} \\ &\leq r \sqrt{37} \end{aligned}$$

となるが、 $\sqrt{37} < 10$ であるから

$$d < 10r$$

が $|x-1| < r$ を満たす x すべてにおいて成り立ち、点 $(x, f(x))$ は点 $(1, 0)$ を中心とする半径

$10r$ の円の内部に含まれることが示された。

(証明終)