

1

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= x(x-1)(x+1) \text{ のとき} \\ f'(x) &= (x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1) \\ &= 3x^2 - 1\end{aligned}$$

であるから、 $f'(x)=0$ のとき $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。これより、関数 $y=f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって、関数 $y=f(x)$ は

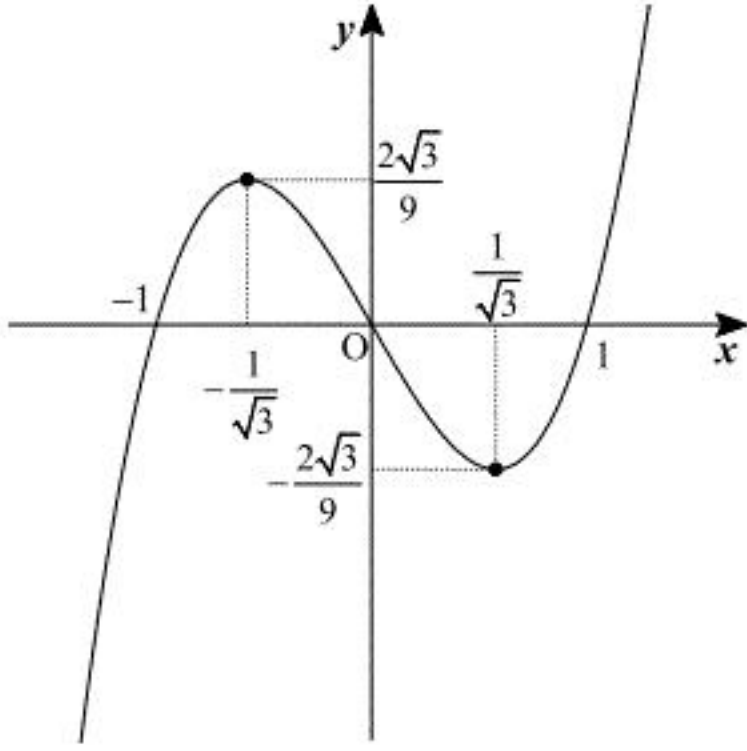
$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき、極大値 } f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき、極小値 } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

をとる。

$$\text{(答) } x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき極大値 } \frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき極小値 } -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

(2)

(1)の結果と、 $y=f(x)$ のグラフは $x=-1, 0, 1$ において x 軸と共有点をもつことより、 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(3)

点 $(x, f(x))$ と点 $(1, 0)$ の間の距離を d とおくと

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x-1)^2 + \{f(x)-0\}^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + x^2(x-1)^2(x+1)^2} \\ &= |x-1|\sqrt{1+x^2(x+1)^2}\end{aligned}$$

となり、 x が $|x-1|<\frac{1}{2}$ をみたすとき

$$\begin{aligned}d &= |x-1|\sqrt{1+x^2(x+1)^2} \\ &< \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2(x+1)^2}\end{aligned}$$

である。また、 $g(x)=1+x^2(x+1)^2$ とおくと

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2x(x+1)^2 + 2x^2(x+1) \\ &= 2x(x+1)(2x+1)\end{aligned}$$

となる。 x が $|x-1|<\frac{1}{2}$ 、つまり、 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ をみたすとき、 $g'(x)>0$ となるから関数 $g(x)$ は単調増加関数であり

$$g(x) < g\left(\frac{3}{2}\right)$$

となる。以上より

$$\begin{aligned}d &< \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2(x+1)^2} \\ &< \frac{1}{2}\sqrt{g\left(\frac{3}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{241}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{241}}{8}\end{aligned}$$

となるが、 $\sqrt{241}<24$ であるから

$$d < 3$$

が $|x-1|<\frac{1}{2}$ をみたす x すべてにおいて成り立ち、点 $(x, f(x))$ は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 3 の円の内部に含まれることが示された。

(証明終)

(4)

点 $(x, f(x))$ と点 $(1, 0)$ の間の距離を d とおくと、(3)と同様にして

$$d = |x-1|\sqrt{1+x^2(x+1)^2}$$

となり、 x が $|x-1|<r$ をみたすとき

$$\begin{aligned}d &= |x-1|\sqrt{1+x^2(x+1)^2} \\ &< r\sqrt{1+x^2(x+1)^2}\end{aligned}$$

である。 x が $|x-1|<r$ をみたすとき、 r が 1 以下の正の数であることに注意すると

$$(0 \leqslant) 1-r < x < 1+r \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $g(x)=1+x^2(x+1)^2$ とおくと

$$g'(x) = 2x(x+1)(2x+1)$$

であり、 $\textcircled{1}$ のとき $g'(x)>0$ となるから関数 $g(x)$ は単調増加関数であり

$$g(x) < g(1+r) \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 r が 1 以下の正の数であるから

$$\begin{aligned}1 < 1+r \leqslant 2 &\Leftrightarrow 1 < (1+r)^2 \leqslant 4 \\ 2 < 2+r \leqslant 3 &\Leftrightarrow 4 < (2+r)^2 \leqslant 9\end{aligned}$$

が成り立ち、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}g(x) &< g(1+r) \\ &= 1+(1+r)^2(2+r)^2 \\ &\leqslant 1+4\cdot 9 \\ &= 37\end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned}d &< r\sqrt{1+x^2(x+1)^2} \\ &< r\sqrt{g(1+r)} \\ &\leqslant r\sqrt{37}\end{aligned}$$

となるが、 $\sqrt{37}<10$ であるから

$$d < 10r$$

が $|x-1|<r$ をみたす x すべてにおいて成り立ち、点 $(x, f(x))$ は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 $10r$ の円の内部に含まれることが示された。

(証明終)

3 次関数 $y = x^3 + 3a_n x^2 + 3b_n x + 1$ の導関数は

$$y' = 3x^2 + 6a_n x + 3b_n$$

となるから、接線の傾きが 0 となるような接点の x 座標は

$$y' = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6a_n x + 3b_n = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2a_n x + b_n = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -a_n \pm \sqrt{a_n^2 - b_n} \quad (\because a_n^2 - b_n \geq 0)$$

となるから

$$c_n = -a_n + \sqrt{a_n^2 - b_n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

(1)

$a_n = n, b_n = n^2$ であるとき、 $a_n^2 - b_n \geq 0$ はみたされる。①より、 $\{c_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} c_n &= -n + \sqrt{n^2 - n^2} \\ &= -n \end{aligned}$$

で与えられる。

(答) $c_n = -n$

(2)

$\{b_n\}$ が初項も公差も 0 である等差数列であるとき $b_n = 0$ となる。このとき、 $a_n^2 - b_n \geq 0$ はみたされる。①より

$$\begin{aligned} c_n &= -a_n + \sqrt{a_n^2 - 0} \\ &= -a_n + |a_n| \end{aligned}$$

となる。

[1] $a_n \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= -a_n + a_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、これは $c_n = b_n$ をみたす。

[2] $a_n < 0$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= -a_n - a_n \\ &= -2a_n (< 0) \end{aligned}$$

となるが、これは $c_n = b_n (= 0)$ をみたさず、不適である。

以上, [1], [2]より求める条件は

$$a_n \geq 0$$

である。

(答) $a_n \geq 0$

(3)

$\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ b_n &= b_1 r^{2(n-1)} \end{aligned}$$

となる。このとき、①より

$$\begin{aligned} c_n &= -a_1 r^{n-1} + \sqrt{(a_1^2 - b_1) r^{2(n-1)}} \\ &= -a_1 r^{n-1} + |r^{n-1}| \sqrt{a_1^2 - b_1} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。このとき $a_n^2 - b_n \geq 0$ より $a_1^2 - b_1 \geq 0$ となるため、②の根号内の値が負になることはない。

[1] $r = 0$ のとき

②より

$$c_n = 0$$

となるから $\{c_n\}$ は等比数列となる。

[2] $r > 0$ のとき

②より

$$\begin{aligned} c_n &= -a_1 r^{n-1} + r^{n-1} \sqrt{a_1^2 - b_1} \\ &= (-a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1}) r^{n-1} \end{aligned}$$

となるから $\{c_n\}$ は等比数列となる。

[3] $r < 0$ のとき

②より

$$n \text{ が奇数のとき, } c_n = -a_1 r^{n-1} + r^{n-1} \sqrt{a_1^2 - b_1} = (-a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1}) r^{n-1}$$

$$n \text{ が偶数のとき, } c_n = -a_1 r^{n-1} - r^{n-1} \sqrt{a_1^2 - b_1} = (-a_1 - \sqrt{a_1^2 - b_1}) r^{n-1}$$

となるから $\{c_n\}$ が等比数列となるのは

$$-a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1} = -a_1 - \sqrt{a_1^2 - b_1} \quad \text{または} \quad -a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1} = -(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - b_1})$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 - b_1 = 0 \quad \text{または} \quad a_1 = 0$$

のときである。

以上[1], [2], [3]より、求める条件は

$$r \geq 0 \quad \text{または} \quad a_1^2 - b_1 = 0 \quad \text{または} \quad a_1 = 0$$

である。

(答) $r \geq 0$ または $a_1^2 - b_1 = 0$ または $a_1 = 0$

(4)

$\{a_n\}$ が初項 100、公差 -3 の等差数列で、 $\{b_n\}$ が初項 396、公差 -12 の等差数列であるとき

$$\begin{aligned} a_n &= 100 - 3(n-1) \\ &= -3n + 103 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 396 - 12(n-1) \\ &= -12n + 408 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} a_n^2 - b_n &= (-3n + 103)^2 - (-12n + 408) \\ &= 9n^2 - 606n + 10201 \\ &= (3n - 101)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となり、 $a_n^2 - b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) はみたされ、このとき①より

$$\begin{aligned} c_n &= -(-3n + 103) + \sqrt{(3n - 101)^2} \\ &= 3n - 103 + |3n - 101| \end{aligned}$$

となる。

[1] $3n - 101 \geq 0$ 、つまり、 $n \geq 34$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= 3n - 103 + (3n - 101) \\ &= 6n - 204 \end{aligned}$$

となる。

[2] $3n - 101 < 0$ 、つまり、 $1 \leq n \leq 33$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= 3n - 103 - (3n - 101) \\ &= -2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $1 \leq n \leq 33$ のとき $c_n = -2$ 、 $n \geq 34$ のとき $c_n = 6n - 204$

3

(1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{2}(h+1)h - 0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{2}(h+1) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \\
 \\
 \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{2}h(h-1) - 0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow +0} \left\{ -\frac{1}{2}(h-1) \right\} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

が成立し、 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることが示された。

(証明終)

(2)

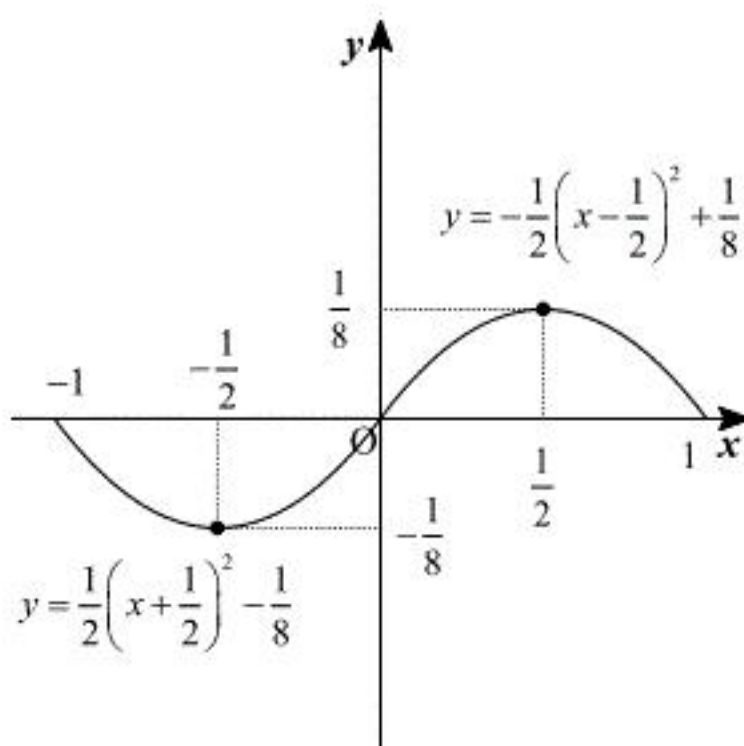
$-1 \leq x \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2}(x+1)x \\
 &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

であり、 $0 < x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{1}{2}x(x-1) \\
 &= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

である。したがって $y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(3)

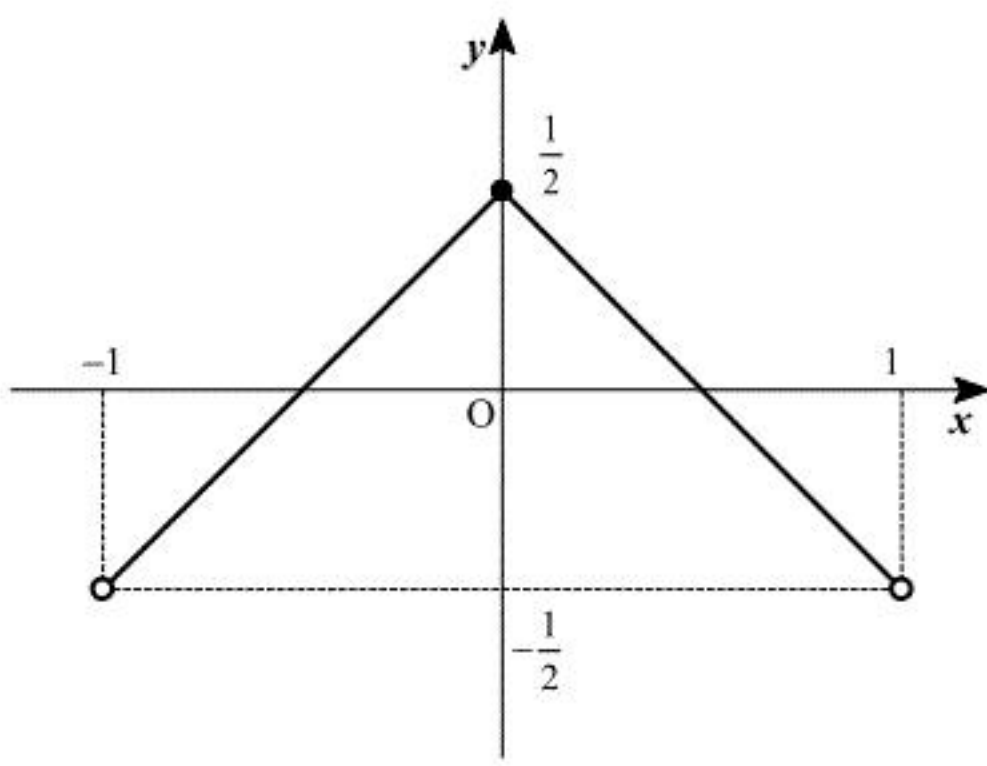
$-1 < x < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x+1) \\
 &= x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

であり、 $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}x \\
 &= -x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

である。したがって、 $y=f'(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。

(答) $y=f'(x)$ のグラフ：前図

(1)と同様にして $x=0$ における $f'(x)$ の微分係数を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} &= -1 \\
 \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} &= 1
 \end{aligned}$$

となるため、 $f'(x)$ は $x=0$ で微分可能ではない。

(答) 微分可能ではない

(4)

求める体積を V とすると、図形の対称性より

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \times \pi \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2}(x-1)x \right\}^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{60}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{60}$

(1)

$k=1$ のとき、カードは当たりの1枚しかないから、当たりのカードにたどりつくまでにひくカードは1枚である。したがって、

$$E_1 = 1$$

である。 $k=2$ のとき、カードは $2^2-1=3$ 枚ある。真ん中のカードが当たりである確率は $\frac{1}{3}$ であり、真ん中のカードがハズレの場合は残りの2枚のうち当たりの方を教えてもらうことができる。したがって、当たりのカードにたどりつくまでにひくカードが1枚である確率は $\frac{1}{3}$, 2枚である確率は $\frac{2}{3} \cdot 1$ であるから

$$\begin{aligned} E_2 &= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

である。 $k=3$ のとき、カードは $2^3-1=7$ 枚ある。真ん中のカードが当たりである確率は $\frac{1}{7}$ である。これがハズレの場合、次の操作でカードをひく方の組は3枚であるから、以降の操作は $k=2$ のときと同様に考えることができる。したがって、当たりのカードにたどりつくまでにひくカードが1枚である確率は $\frac{1}{7}$, 2枚である確率は $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3}$, 3枚である確率は $\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$ であるから

$$\begin{aligned} E_3 &= 1 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} + 3 \times \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{17}{7} \end{aligned}$$

となる。 $k=4$ のとき、カードは $2^4-1=15$ 枚ある。真ん中のカードが当たりである確率は $\frac{1}{15}$ である。これがハズレの場合、次の操作でカードをひく方の組は7枚であるから、以降の操作は $k=3$ のときと同様に考えることができる。したがって、当たりのカードにたどりつくまでにひくカードが1枚である確率は $\frac{1}{15}$, 2枚である確率は $\frac{14}{15} \cdot \frac{1}{7}$, 3枚である確率は $\frac{14}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3}$, 4枚である確率は $\frac{14}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$ であるから

$$\begin{aligned} E_4 &= 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{7} + 3 \times \frac{14}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} + 4 \times \frac{14}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{49}{15} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad E_1 = 1, E_2 = \frac{5}{3}, E_3 = \frac{17}{7}, E_4 = \frac{49}{15}$$

(2)

カードが $2^{k+1}-1$ 枚あるとき $k \geq 1$ より $2^{k+1}-1 > 0$ であるから、真ん中のカードが当たりである確率は $\frac{1}{2^{k+1}-1}$ となる。これがハズレの場合、次の操作でカードをひく方の組のカードの枚数は

$$\frac{2^{k+1}-1-1}{2} = 2^k - 1$$

枚であるため、既に1枚引いた状態で 2^k-1 枚のカードの中から当たりを探すことになる。 2^k-1 枚のカードの中から当たりにたどりつくまでにひくカードの枚数の期待値が E_k であるから、 E_{k+1} は

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= 1 \times \frac{1}{2^{k+1}-1} + (E_k + 1) \times \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1} \\ &= \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1} E_k + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad E_{k+1} = \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1} E_k + 1$$

(3)

$d_k = E_k - \frac{1}{2^k} (E_k + 1)$ とおくとき

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= E_{k+1} - \frac{1}{2^{k+1}} (E_{k+1} + 1) \\ &= \left(\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1} E_k + 1 \right) - \frac{1}{2^{k+1}} \left(\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1} E_k + 2 \right) \\ &= \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right) E_k + 1 - \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}} E_k + 1 - \frac{1}{2^k} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) E_k + 1 - \frac{1}{2^k} \\ &= E_k - \frac{1}{2^k} (E_k + 1) + 1 \\ &= d_k + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad d_{k+1} = d_k + 1$$

(4)

$$\begin{aligned} d_1 &= E_1 - \frac{1}{2^1} (E_1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることと、(3)の結果より、数列 $\{d_k\}$ は初項0、公差1の等差数列であるから

$$d_k = k - 1$$

となる。よって

$$\begin{aligned} E_k - \frac{1}{2^k} (E_k + 1) &= k - 1 \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) E_k &= k - 1 + \frac{1}{2^k} \\ \Leftrightarrow E_k &= \frac{2^k (k-1) + 1}{2^k - 1} \quad (\because 2^k - 1 > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad E_k = \frac{2^k (k-1) + 1}{2^k - 1}$$

(5)

(4)の結果より

$$\begin{aligned} E_k - k &= \frac{2^k (k-1) + 1}{2^k - 1} - k \\ &= \frac{-2^k + 1 + k}{2^k - 1} \\ &= -1 + \frac{k}{2^k - 1} \\ &= -1 + \frac{k}{2^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} \end{aligned}$$

となるから、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2^k} = 0$ を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (E_k - k) &= -1 + 0 \cdot \frac{1}{1-0} \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (E_k - k) = -1$$