

平成 26 年度 入学試験問題(前期日程)

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

試験時間 120 分

理学部(理学科・応用理学科)

医学部(医学科)

問題冊子 問題…… 1 ～ 4 ページ…… 1 ～ 2

解答用紙…… 4 枚

下書用紙…… 1 枚

配 点……表示のとおり。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に、問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお、解答用紙には、必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは、切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は、持ち帰らないこと。
7. 試験終了後、問題冊子、下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後、指示があるまでは退室しないこと。

1 $f(x) = x(x-1)(x+1)$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ が極大、極小になるときの x と、その極大値、極小値を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (3) x が $|x-1| < \frac{1}{2}$ をみたすとき、点 $(x, f(x))$ は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 3 の円の内部に含まれることを示せ。
- (4) 1 以下の正の数 r に対して、 x が $|x-1| < r$ の範囲を動くとき、点 $(x, f(x))$ は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 $10r$ の円の内部に含まれることを示せ。

(100 点)

2 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $a_n^2 - b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) となる数列とし、3 次関数

$$y = x^3 + 3a_nx^2 + 3b_nx + 1$$

のグラフの接線の傾きが 0 となる接点の x 座標のうち小さくない方を c_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ が $a_n = n, b_n = n^2$ で与えられる数列のとき、 $\{c_n\}$ を求めよ。
- (2) $\{b_n\}$ を初項も公差も 0 である等差数列とする。このとき、 $c_n = b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) となるための条件を求めよ。
- (3) $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ公比が r, r^2 の等比数列とする。このとき、 $\{c_n\}$ が等比数列になるための条件を求めよ。
- (4) $\{a_n\}$ が初項 100、公差 -3 の等差数列で、 $\{b_n\}$ は初項 396、公差 -12 の等差数列のとき、 $\{c_n\}$ を求めよ。

(100 点)

3 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)x & (-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2}x(x-1) & (0 < x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ。
- (2) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。
- (3) $y=f'(x)$ のグラフを $-1 < x < 1$ の範囲でかき、 $f'(x)$ が $x=0$ で微分可能かどうかを理由をつけて述べよ。
- (4) $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分を、 x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

(100 点)

4 k は 1 以上の整数であるとする。連続した整数が書かれた $2^k - 1$ 枚のカードが一組あり、その中に無作為に選ばれた当たりが一枚だけ含まれているとする。

次のようなルールで当たりのカードにたどりつくことを考える。

- (i) カードのうち、ちょうど真ん中の整数の書かれたカードをひく。それが当たりなら終了する。
- (ii) ハズレならば、真ん中の整数より大きいカードの組と小さいカードの組に分ける。
- (iii) 当たりのカードの含まれた組を教えてもらい、その組に対して、(i)に戻って繰り返す。

このルールのもとで、ひいたカードの枚数の期待値を E_k とおく。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) E_1, E_2, E_3, E_4 を求めよ。
- (2) E_{k+1} を E_k を用いて表せ。
- (3) $d_k = E_k - \frac{1}{2^k}(E_k + 1)$ とおくとき、 d_k のみたす漸化式を求めよ。
- (4) E_k を求めよ。
- (5) $\lim_{k \rightarrow \infty} (E_k - k)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2^k} = 0$ であることを用いてもよい。

(100 点)