

(1)

与式を変形すると

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2kx - 4ky + 10k - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+k)^2 + (y-2k)^2 &= 5k^2 - 10k + 20\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}5k^2 - 10k + 20 &= 5(k-1)^2 + 15 \\ &> 0\end{aligned}$$

であるから、図形 C は中心 $(-k, 2k)$ 、半径 $\sqrt{5k^2 - 10k + 20}$ の円である。

(証明終)

(2)

与式を変形すると

$$x^2 + y^2 - 10 + 2k(x - 2y + 5) = 0$$

より、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

を満たす (x, y) は k によらず常に与式を満たす。これを解くと、

$$\begin{aligned}(2y-5)^2 + y^2 - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2 - 4y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \therefore (x, y) &= (-1 + 2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}), (-1 - 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

となり、これが定点の座標である。

$$(\text{答}) \quad (-1 + 2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}), (-1 - 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$$

(3)

円 C の半径の最小値は

$$\sqrt{5k^2 - 10k + 20} = \sqrt{5(k-1)^2 + 15}$$

より、 $k=1$ のとき $\sqrt{15}$ である。したがって、求める面積の最小値は

$$\pi \cdot (\sqrt{15})^2 = 15\pi$$

である。

(答) 15π

(4)

曲線 C の方程式に $y = x - 2$ を代入すると、

$$\begin{aligned}x^2 + (x-2)^2 + 2kx - 4k(x-2) + 10k - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - (k+2)x + 9k - 8 &= 0\end{aligned}$$

となる。求める共有点の個数は、この2次方程式の解の個数に等しい。ここで、この方程式の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned}D &= (k+2)^2 - 4(9k-8) \\ &= k^2 - 32k + 36 \\ &= \{k - (16 - 2\sqrt{55})\} \{k - (16 + 2\sqrt{55})\}\end{aligned}$$

と変形できるから、

$$\begin{cases} k < 16 - 2\sqrt{55}, 16 + 2\sqrt{55} < k & \text{のとき、共有点は2個} \\ k = 16 + 2\sqrt{55}, 16 - 2\sqrt{55} & \text{のとき、共有点は1個} \\ 16 - 2\sqrt{55} < k < 16 + 2\sqrt{55} & \text{のとき、共有点は0個} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} k < 16 - 2\sqrt{55}, 16 + 2\sqrt{55} < k & \text{のとき、共有点は2個} \\ k = 16 + 2\sqrt{55}, 16 - 2\sqrt{55} & \text{のとき、共有点は1個} \\ 16 - 2\sqrt{55} < k < 16 + 2\sqrt{55} & \text{のとき、共有点は0個} \end{cases}$$

(1)

 a_2, a_3, a_4, a_5 を順に求めると

$$\begin{aligned} a_2 &= -\sqrt{2}a_1 - 1 \\ &= -\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) - 1 \\ &= -\sqrt{2} - 3 \quad (< 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\sqrt{2}a_2 - 1 \\ &= -\sqrt{2}(-\sqrt{2}-3) - 1 \\ &= 3\sqrt{2} + 1 \quad (< 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= -\sqrt{2}a_3 - 1 \\ &= -\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1) - 1 \\ &= -\sqrt{2} - 7 \quad (< 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= -\sqrt{2}a_4 - 1 \\ &= -\sqrt{2}(-\sqrt{2}-7) - 1 \\ &= 7\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = -\sqrt{2} - 3, a_3 = 3\sqrt{2} + 1, a_4 = -\sqrt{2} - 7, a_5 = 7\sqrt{2} + 1$$

(2)

数学的帰納法を利用して、 $n \geq 5$ のとき $a_n > 10$ であることを証明する。[1] $n=5$ のとき

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &> 1.4 \text{ より,} \\ 7\sqrt{2} + 1 &> 10.8 \\ \therefore a_5 &> 10 \end{aligned}$$

となる。

[2] $n=k$ のとき $a_k > 10$ となることを仮定すると、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (\sqrt{2}-1)a_k + 6 \\ &> 0.4a_k + 6 \quad (\because \sqrt{2} > 1.4) \\ &> 4 + 6 \quad (\because a_k > 10) \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{k+1} > 10$$

となる。したがって、 $n=k+1$ のときも $a_{k+1} > 10$ となる。以上[1], [2]より、数学的帰納法から、 $n \geq 5$ のとき $a_n > 10$ であることが示された。

(証明終)

(3)

(2)の結果より、 $n \geq 5$ のとき $a_n > 10$ であるから、

$$a_{n+1} = (\sqrt{2}-1)a_n + 6$$

を満たす。これを変形すると

$$a_{n+1} - (6+3\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)\{a_n - (6+3\sqrt{2})\}$$

となる。したがって、 $n \geq 5$ のとき

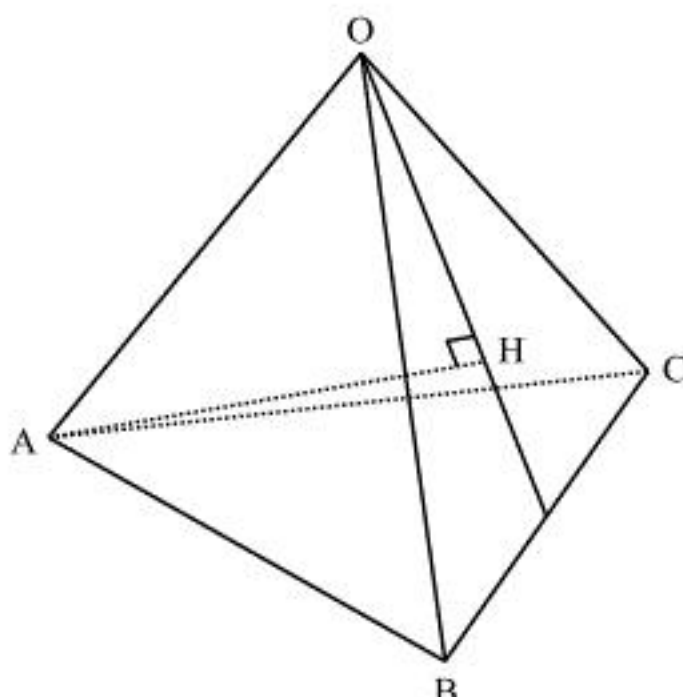
$$\begin{aligned} a_n - (6+3\sqrt{2}) &= (\sqrt{2}-1)^{n-5} \{a_5 - (6+3\sqrt{2})\} \\ \therefore a_n &= 6+3\sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)^{n-5} (4\sqrt{2}-5) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 6+3\sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)^{n-5} (4\sqrt{2}-5) \quad (n \geq 5)$$

3

(1)



$\triangle OAB$ は1辺の長さが1の正三角形であるから、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。同様にして、

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

である。

$$(答) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

(2)

点Hは平面OBC上の点であるから、実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OH} = s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表すことができる。ここで、 $\overrightarrow{AH}$ は平面OBCに垂直であるから、

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{c} = 0$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \vec{b} &= \overrightarrow{AH} \cdot \vec{c} = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 + t\vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \\ -\vec{a} \cdot \vec{c} + s\vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} + s + \frac{1}{2}t = 0 \\ -\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}s = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{AH} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{AH} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(3)

(2)の結果より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AH}|^2 &= \left| -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{2}{3} \\ \therefore |\overrightarrow{AH}| &= \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad |\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(4)

$\triangle OBC$ は1辺の長さが1の正三角形であるから、

$$\begin{aligned}\triangle OBC &= \frac{1}{2} |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \angle BOC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \triangle OBC = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(5)

求める体積 V は、

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle OBC \cdot |\overrightarrow{AH}| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad V = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

(1)

$t = \frac{\pi}{2}$ を代入して変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 3x - 2 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $y = f(x)$ は $x = -\frac{3}{4}$ のときに最小値

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{25}{8}$$

をとる。

(答) $-\frac{25}{8}$

(2)

x についての 2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (2 + \sin t)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\cos^2 t - 2) \\ &= 9\sin^2 t + 4\sin t + 12 \\ &= 9\left(\sin t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{104}{9} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より、 t がどのような値であっても $D > 0$ となる。したがって、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 つの共有点を持つ。

(証明終)

(3)

$f(x) = 0$ の解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{2 + \sin t}{2} \\ \alpha\beta = \frac{\cos^2 t - 2}{2} \end{cases}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{1}{4}(9\sin^2 t + 4\sin t + 12) \\ &= \frac{1}{4}\left\{9\left(\sin t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{104}{9}\right\} \end{aligned}$$

となる。(2) の経過より、

$$9\left(\sin t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{104}{9} > 0$$

であるから、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さは

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\left\{9\left(\sin t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{104}{9}\right\}} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq t < 2\pi$ より $-1 \leq \sin t \leq 1$ であるから、 $\beta - \alpha$ は $\sin t = -\frac{2}{9}$ のときに最小値

$$\beta - \alpha = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

をとる。

(答) $\frac{\sqrt{26}}{3}$

(4)

$f(x) = 0$ の解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、

$$f(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta)$$

と書ける。したがって、(3) の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (-f(x)) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{26}{81} \sqrt{26} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{26}{81} \sqrt{26}$