

1

(1)

$x+1=X, y-2=Y$ とおくと、与えられた条件より

$$|X|<\frac{1}{2}, |Y|<\frac{1}{3}$$

となる。このとき、求める不等式の左辺に $x=X-1, y=Y+2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \left| -8x^3+12xy+3y^2+4 \right| &= \left| -8(X-1)^3+12(X-1)(Y+2)+3(Y+2)^2+4 \right| \\ &= \left| -8X^3+24X^2+12XY+3Y^2 \right| \end{aligned}$$

となるので、三角不等式より

$$\begin{aligned} \left| -8X^3+24X^2+12XY+3Y^2 \right| &\leq 8|X^3|+24|X^2|+12|XY|+3|Y^2| \\ &= 8|X|^3+24|X|^2+12|X||Y|+3|Y|^2 \\ &< 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{28}{3} \\ &< 10 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\left| -8x^3+12xy+3y^2+4 \right| < 10$$

が示された。

(証明終)

(2)

(i)

1個のサイコロに注目したとき、1が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから、 $0 \leq n \leq 12$ のとき

$$\begin{aligned} P_n &= {}_{12}C_n \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12-n} \\ &= \frac{12!}{n!(12-n)!} \cdot \frac{5^{12-n}}{6^{12}} \end{aligned}$$

となり、これらはいずれも0でない。ここで、 $0 \leq n \leq 11$ のとき、 $P_{n+1} > P_n$ 、すなわち $\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$

となる n の範囲を求めると

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{P_n} &> 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{12!}{(n+1)!\{12-(n+1)\}!} \cdot \frac{5^{12-(n+1)}}{6^{12}}}{\frac{12!}{n!(12-n)!} \cdot \frac{5^{12-n}}{6^{12}}} &> 1 \\ \Leftrightarrow \frac{12-n}{n+1} \cdot \frac{1}{5} &> 1 \\ \Leftrightarrow n &< \frac{7}{6} \end{aligned}$$

となり、同様に

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n \Leftrightarrow n = \frac{7}{6} \\ P_{n+1} &< P_n \Leftrightarrow n > \frac{7}{6} \end{aligned}$$

となる。これより

$$P_0 < P_1 < P_2 > P_3 > \cdots > P_{12}$$

となるため、 P_2 が最大値である。

(証明終)

(ii)

方程式の2解を α, β とする。このとき、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{p}{a} \\ \alpha\beta = \frac{q}{a} \end{cases}$$

となる。 α, β が整数であるとき、 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ は整数であるから、 $\frac{p}{a}, \frac{q}{a}$ も整数である。

[1] $p \neq q$ のとき

p, q は異なる素数であるから、公約数は1のみである。したがって、 $\frac{p}{a}, \frac{q}{a}$ がともに整数

となるためには $a=1$ が必要であり、このとき

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha\beta = q \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $\alpha\beta = q$ より $(\alpha, \beta) = (1, q), (q, 1)$ となるが、 $(\alpha, \beta) = (1, q)$ としても一般性を失わないので $(\alpha, \beta) = (1, q)$ とする。これを①に代入すると、

$$1+q = p$$

となる。したがって、 q と p は連続する素数であると分かるが、この条件を満たす素数 (p, q) の組は $(3, 2)$ のみである。以上より、

$$(a, p, q) = (1, 3, 2)$$

となり、このとき得られる2次方程式 $x^2 - 3x + 2 = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 2 \end{aligned}$$

となるから、条件を満たす。

[2] $p = q$ のとき

p, q の公約数は1, p であるから、 $a=1$ または $a=p$ となる必要がある。

$a=1$ のとき、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha\beta = p \end{cases}$$

となるが、[1]と同様に $(\alpha, \beta) = (1, p)$ とすると

$$1+p = p$$

となり、不適である。一方 $a=p$ のとき、2次方程式を解くと

$$\begin{aligned} px^2 - px + p &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

となり、解が整数とならないため不適である。したがって、 $p = q$ のとき条件を満たす

(a, p, q) は存在しない。

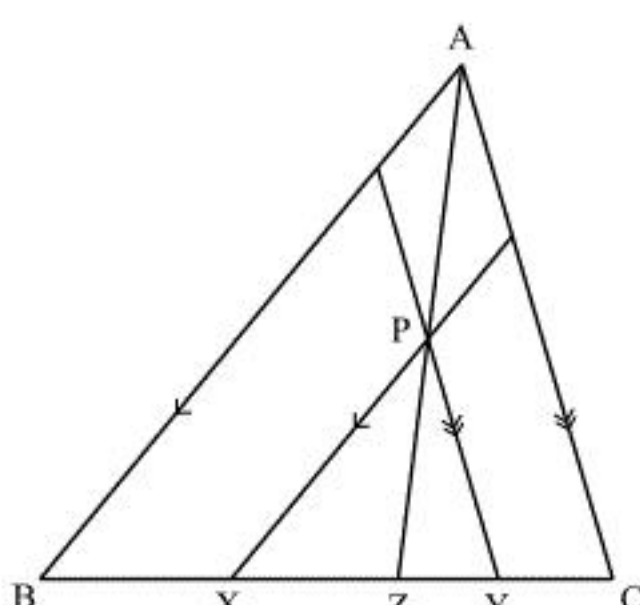
以上[1],[2]より、2解が整数となるような組 (a, p, q) は

$$(a, p, q) = (1, 3, 2)$$

である。

(答) $(a, p, q) = (1, 3, 2)$

(iii)



AB//PXより、

$$PZ:AP = XZ:BX \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。同様に AC//PY より、

$$PZ:AP = YZ:CY \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。①、②より、

$$\begin{aligned} XZ:BX &= YZ:CY \\ \Leftrightarrow BX \cdot YZ &= XZ \cdot CY \\ \Leftrightarrow \frac{CY}{BX} &= \frac{YZ}{XZ} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(1)

 $n=1$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2a_1x + a_1^2 \\ &= (x - a_1)^2 \end{aligned}$$

と変形できることから、常に $f(x) \geq 0$ であり、等号は $x = a_1$ のとき成り立つ。 $n=2$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 2(a_1 + a_2)x + (a_1^2 + a_2^2) \\ &= (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 \end{aligned}$$

と変形できることから、常に $f(x) \geq 0$ であり、等号は $x = a_1 = a_2$ のとき成り立つ。

(証明終)

(2)

 $f(x)$ を変形すると、

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$$

となる。したがって、常に $f(x) \geq 0$ であり、等号は $x = a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)の結果より $f(x) \geq 0$ であるから、2次関数 $y = f(x)$ は x 軸と共有点をもたないか、あるいは1点のみを共有する。よって、 $f(x)$ の判別式を D とすると、 $D \leq 0$ となることから、

$$\frac{D}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ のとき、 $D=0$ である。 $D=0$ となるのは、2次関数

$y = f(x)$ のグラフが x 軸と1点のみを共有する場合であるが、(2)の結果より、 $f(x) \geq 0$ の等

号が $x = a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ の場合に限り成り立つことから、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と1点のみ

を共有するとき $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ である。以上より、 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ であ

れば、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ はすべて等しいことが示された。

(証明終)

3

(1)

$$a_1 = 0 < 5 \text{ であるから}$$

$$a_2 = a_1 + 5 = 5$$

となる。一方、 $5 \leq a_2 < 10$ より

$$a_3 = 5 - 5 = 0$$

となる。これを繰り返すことから、帰納的に

$$n \text{ が偶数のとき } a_n = 5$$

$$n \text{ が奇数のとき } a_n = 0$$

とわかる。

(答) n が偶数のとき $a_n = 5$ 、 n が奇数のとき $a_n = 0$

(2)

$$a_1 = 0 < 5 \text{ であるから,}$$

$$a_2 = a_1 + 10 = 10$$

となる。ここで、 $n \geq 2$ において $a_n \geq 10$ であることを数学的帰納法により証明する。

[1] $n = 2$ のとき

$$a_2 = 10 \geq 10$$

より成立する。

[2] $n = k$ のとき

$a_k \geq 10$ が成り立つことを仮定すると、

$$a_{k+1} = 2a_k - 9$$

$$\geq 2 \cdot 10 - 9$$

$$= 11$$

となるから、 $n = k + 1$ のときも $a_{k+1} \geq 10$ が成り立つ。

以上[1], [2]より、 $n \geq 2$ において $a_n \geq 10$ であることが示された。したがって、 $n \geq 2$ において

$$a_{n+1} = 2a_n - 9$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - 9 = 2(a_n - 9)$$

より、

$$a_n - 9 = 2^{n-2}(a_2 - 9)$$

$$\therefore a_n = 2^{n-2} + 9$$

となる。以上より、 $\{a_n\}$ は

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ 2^{n-2} + 9 & (n \geq 2) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) a = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ 2^{n-2} + 9 & (n \geq 2) \end{cases}$$

(3)

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $a_n < 10$ となることを数学的帰納法により証明する。

[1] $n = 1$ のとき

$$a_1 = 0 < 10$$

より成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$a_k < 10$ が成り立つと仮定する。 $a_k < 5$ のとき、

$$a_{k+1} = a_k + c$$

$$< 5 + c$$

$$< 10$$

となり、 $5 \leq a_k < 10$ のとき

$$a_{k+1} = a_k - 5$$

$$< 10 - 5$$

$$< 10$$

となるから、 $n = k + 1$ のときも $a_{k+1} < 10$ が成り立つ。

以上[1], [2]より、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $a_n < 10$ となることが示された。

(証明終)

(4)

初めて $a_n \geq 10$ となる n を N とする。(2)と同様に、 $n \geq N$ において $a_n \geq 10$ であることを数学的帰納法により証明する。

[1] $n = N$ のとき

N は初めて $a_n \geq 10$ となる n であるから、 $a_N \geq 10$ である。

[2] $n = k$ のとき

$a_k \geq 10$ が成り立つと仮定すると、

$$a_{k+1} = 2a_k - \frac{16}{3} + 1$$

$$\geq 2 \cdot 10 - \frac{13}{3}$$

$$\geq 10$$

となるので、 $n = k + 1$ のときも $a_{k+1} \geq 10$ が成立する。

以上[1], [2]より、 $n \geq N$ において $a_n \geq 10$ であることが示された。

次に、 m を $1 \leq m \leq 15$ の範囲の整数としたときに、

$$a_{2m-1} = \frac{m-1}{3}, a_{2m} = \frac{m+15}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

[1] $m = 1$ のとき

与えられた条件より、

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

であり、これらは①を満たす。

[2] $m = l$ ($1 \leq l \leq 14$) のとき

①が成り立つと仮定すると、

$$5 < a_{2l} = \frac{l+15}{3} < 10 \quad (\because 1 \leq l \leq 14)$$

より、

$$a_{2l+1} = \frac{l+15}{3} - 5 = \frac{l}{3} = \frac{(l+1)-1}{3}$$

となる。同様に、

$$a_{2l+1} = \frac{l}{3} < 5 \quad (\because 1 \leq l \leq 14)$$

であるから、

$$a_{2l+2} = \frac{l}{3} + \frac{16}{3} = \frac{(l+1)+15}{3}$$

となる。よって、 $m = l + 1$ のときも①が成り立つ。

以上[1], [2]より、 $1 \leq n \leq 30$ のときの a_n の一般項は①で表され、

$$a_{30} = a_{2 \cdot 15} = \frac{15+15}{3} = 10$$

より、 $n = 30$ で初めて $a_{30} \geq 10$ となる。したがって、 $n \geq 30$ のときの一般項を求めると、

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{13}{3}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{13}{3} = 2 \left(a_n - \frac{13}{3} \right)$$

より、

$$a_n - \frac{13}{3} = 2^{n-30} \left(a_{30} - \frac{13}{3} \right)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} (17 \cdot 2^{n-30} + 13)$$

となる。このとき、 $a_n > 1000$ を変形すると、

$$\frac{1}{3} (17 \cdot 2^{n-30} + 13) > 1000$$

$$\Leftrightarrow 17 \cdot 2^{n-30} > 2987$$

$$\therefore 2^{n-30} > 175.7 \dots$$

となる。ここで

$$2^7 = 128, 2^8 = 256$$

であるから、 $a_n > 1000$ を満たす最小の n は

$$n - 30 = 8$$

$$\therefore n = 38$$

である。

(答) $n = 38$

(1)

$a^x = e^{f(x)} > 0$ より, 両辺の自然対数をとると,

$$\log a^x = \log e^{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x \log a$$

となる。

(答) $f(x) = x \log a$

(2)

(1)の結果を利用すると,

$$\begin{aligned} \int a^x dx &= \int e^{x \log a} dx \\ &= \frac{1}{\log a} e^{x \log a} + C \\ &= \frac{a^x}{\log a} + C \end{aligned}$$

となる。ここで, C は積分定数である。

(答) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ (C は積分定数)

(3)

与式より,

$$3^{1-|1+|y||} \leq 3 \Leftrightarrow 3^{1-|1+|y||} \leq 3$$

となる。このとき, 求める領域は

$$3^{|1+|y||} \leq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

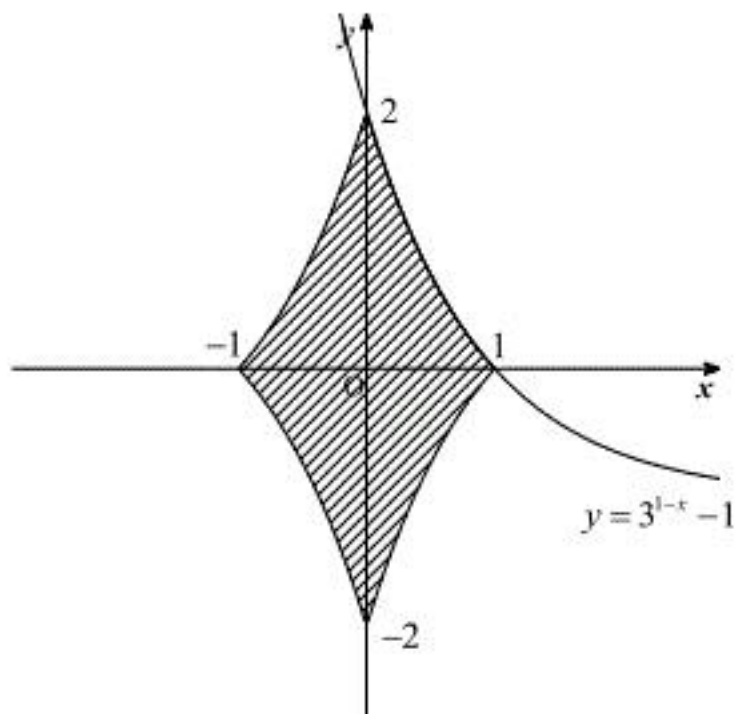
を満たす領域を x 軸の正の方向に 1 だけ平行移動させて得られる領域に等しい。ここで, (x, y) が $\textcircled{1}$ を満たすとき, $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ も $\textcircled{1}$ を満たす。したがって, $\textcircled{1}$ で表される領域は x 軸, y 軸, 原点に関して対称であるから, $x \geq 0, y \geq 0$ の部分のみを考えればよい。

このとき, $\textcircled{1}$ は

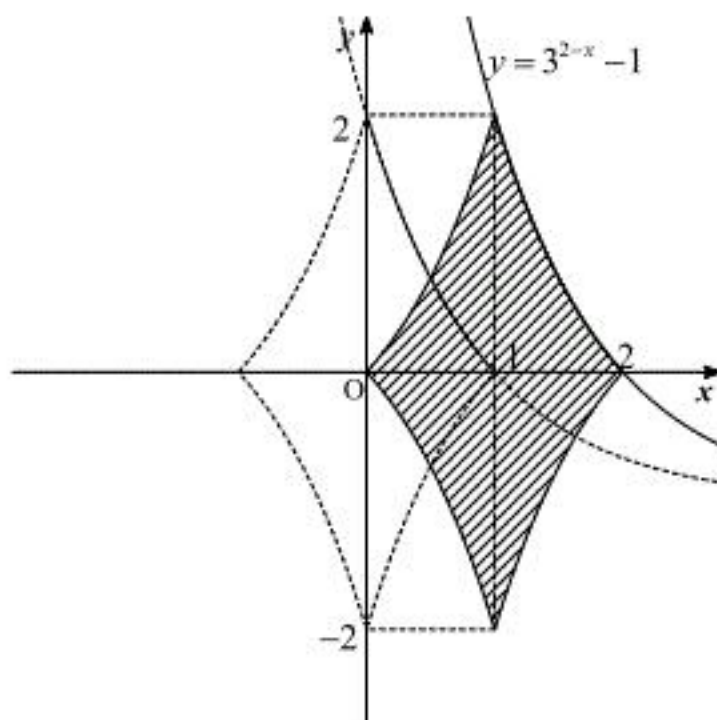
$$3^x (1+y) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow y \leq 3^{1-x} - 1$$

となるから, $\textcircled{1}$ を図示すると以下のようになる。



求める領域は, これを x 軸の正の方向に 1 だけ平行移動させて得られる領域である。ただし, すべての境界を含む。



(答) 前図(境界含む)

(4)

求める面積を S とおくと, S は $\textcircled{1}$ で表される領域の面積に等しい。 $\textcircled{1}$ で表される領域は x 軸, y 軸, 原点に関して対称であるから, $x \geq 0, y \geq 0$ の部分の面積を求め, それを 4 倍すればよい。したがって,

$$S = 4 \int_0^1 (3^{1-x} - 1) dx$$

と表せる。 $1-x=t$ と置換すると, $\frac{dx}{dt} = -1$ であり, x, t の変化は以下の表のようになる。

x	0	→	1
t	1	→	0

したがって,

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_1^0 (3^t - 1) \cdot (-1) dt \\ &= 4 \int_0^1 (3^t - 1) dt \\ &= 4 \left[\frac{3^t}{\log 3} - t \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{\log 3} - 4 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{8}{\log 3} - 4$