

(1)

対数関数の底の変換公式を用いると、

$$\begin{aligned}\log_4 6 - \log_8 9 &= \frac{\log_2 6}{\log_2 4} - \frac{\log_2 9}{\log_2 8} \\ &= \frac{\log_2 6}{2} - \frac{\log_2 9}{3} \\ &= \frac{3\log_2 6 - 2\log_2 9}{6} \\ &= \frac{\log_2 216 - \log_2 81}{6} \\ &> 0\end{aligned}$$

$$\therefore \log_4 6 > \log_8 9$$

となる。また、 $1 < 8 < 9$  より、

$$\log_9 8 < 1 < \log_8 9$$

であるから

$$\log_9 8 < \log_8 9 < \log_4 6$$

となる。

(答)  $\log_9 8, \log_8 9, \log_4 6$

(2)

真数条件より、 $x=1$  のとき  $(x-1)^3 = 0$  であるから、 $x \neq 1$  である。さらに、

$$5-x > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 5$$

$$(x-1)^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 > 0 \left( \because (x-1)^2 > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

となるから、 $1 < x < 5$  である。ここで、対数関数の底の変換公式より、

$$\log_{\frac{1}{8}} (x-1)^3 = \frac{3\log_{\frac{1}{2}} (x-1)}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}} = \log_{\frac{1}{2}} (x-1)$$

となるから、

$$\begin{aligned}y &= \log_{\frac{1}{2}} (5-x) + \log_{\frac{1}{2}} (x-1) \\ &= \log_{\frac{1}{2}} (5-x)(x-1) \\ &= \log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 6x - 5) \\ &= \log_{\frac{1}{2}} \left\{ -(x-3)^2 + 4 \right\}\end{aligned}$$

となる。よって底  $\frac{1}{2} < 1$  に気を付けると、 $y$  は  $x=3$  のとき最小値

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$$

をとる。

(答)  $-2$

(1)

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = l\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = k\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = l\vec{b}$$

(2)

メネラウスの定理より,

$$\frac{PA}{OP} \cdot \frac{RQ}{AR} \cdot \frac{BO}{QB} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-k}{k} \cdot \frac{RQ}{AR} \cdot \frac{1}{1-l} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{RQ}{AR} = \frac{k(1-l)}{1-k}$$

$$\Leftrightarrow AR : RQ = 1-k : k(1-l)$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \frac{k(1-l)\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OQ}}{1-k+k(1-l)} \\ &= \frac{k(1-l)\vec{a} + l(1-k)\vec{b}}{1-k+k(1-l)} \\ &= \frac{k(1-l)}{1-kl}\vec{a} + \frac{l(1-k)}{1-kl}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{k(1-l)}{1-kl}\vec{a} + \frac{l(1-k)}{1-kl}\vec{b}$$

(3)

BP ⊥ OA から,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow k|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \left( \because |\vec{a}| \neq 0 \right)$$

となる。同様にして, AQ ⊥ OB から,

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \cdot (l\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow l|\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore l = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \left( \because |\vec{b}| \neq 0 \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}, l = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

(4)

内積を計算すると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left\{ \frac{k(1-l)}{1-kl}\vec{a} + \frac{l(1-k)}{1-kl}\vec{b} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -\frac{k(1-l)}{1-kl}|\vec{a}|^2 + \frac{l(1-k)}{1-kl}|\vec{b}|^2 + \frac{k-l}{1-kl}\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

となる。ここで(3)の結果を代入して整理すると,

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{1-kl} \{ -(1-l) + (1-k) + (k-l) \} = 0$$

となる。ここで  $\vec{a}, \vec{b}$  は一次独立であり,  $0 < k < 1, 0 < l < 1$  を満たすから  $\overrightarrow{OR} \neq 0, \overrightarrow{AB} \neq 0$  となる。

したがって,

$$\overrightarrow{OR} \perp \overrightarrow{AB}$$

である。

(証明終)

100 から 200 までの整数のうち、整数  $n$  の倍数の集合を  $A_n$  とする。また、 $A_n$  の要素の総和を  $S(n)$  とする。

(1)

$A_4 = \{100, 104, \dots, 200\}$  である。ここで、

$$100 \div 4 = 25$$

$$200 \div 4 = 50$$

より、 $A_4$  の要素の個数は 26 個である。よって、

$$S(4) = \frac{26(100+200)}{2} = 3900$$

となる。

(答) 3900

(2)

$A_5 = \{100, 105, \dots, 200\}$  である。ここで、

$$100 \div 5 = 20$$

$$200 \div 5 = 40$$

より、 $A_5$  の要素の個数は 21 個である。よって、

$$S(5) = \frac{21(100+200)}{2} = 3150$$

となる。

(答) 3150

(3)

$A_7 = \{105, 112, \dots, 196\}$  である。ここで

$$105 \div 7 = 15$$

$$196 \div 7 = 28$$

より、 $A_7$  の要素の個数は 14 個である。よって、

$$S(7) = \frac{14(105+196)}{2} = 2107$$

となる。

(答) 2107

(4)

4 と 5 の最小公倍数は 20 であるから、100 から 200 までの整数のうち、4 または 5 の倍数の和は、

$$S(4) + S(5) - S(20)$$

である。ここで、

$$100 \div 20 = 5$$

$$200 \div 20 = 10$$

より、 $A_{20}$  の要素の個数は 6 個である。よって、

$$S(20) = \frac{6 \cdot (100+200)}{2} = 900$$

となるから、求める和は、

$$3900 + 3150 - 900 = 6150$$

となる。

(答) 6150

(5)

5 と 7、4 と 7、4 と 5 と 7 の最小公倍数はそれぞれ 35, 28, 140 であるから、100 から 200 までの整数のうち、4 または 5 または 7 の倍数の和は、

$$S(4) + S(5) + S(7) - S(20) - S(35) - S(28) + S(140)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} S(35) &= 105 + 140 + 175 \\ &= 420 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(28) &= 112 + 140 + 168 + 196 \\ &= 616 \end{aligned}$$

$$S(140) = 140$$

となるから、求める和は、

$$3900 + 3150 + 2107 - 900 - 420 - 616 + 140 = 7361$$

となる。

(答) 7361

4

(1)

求める円の中心は、2点 $\left(-3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における、放物線 $C$ の法線の交点である。

$$y = \frac{1}{6\sqrt{3}}x^2 \text{ より}$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt{3}}x$$

であるから、点 $\left(-3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における法線の方程式は、

$$y = \sqrt{3}(x+3) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

となり、点 $\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における法線の方程式は、

$$y = -\sqrt{3}(x-3) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

となる。これら2直線の交点は $\left(0, \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)$ であり、これが円の中心の座標である。また、円の

半径は中心 $\left(0, \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)$ と点 $\left(-3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の距離に等しく、

$$\sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 6$$

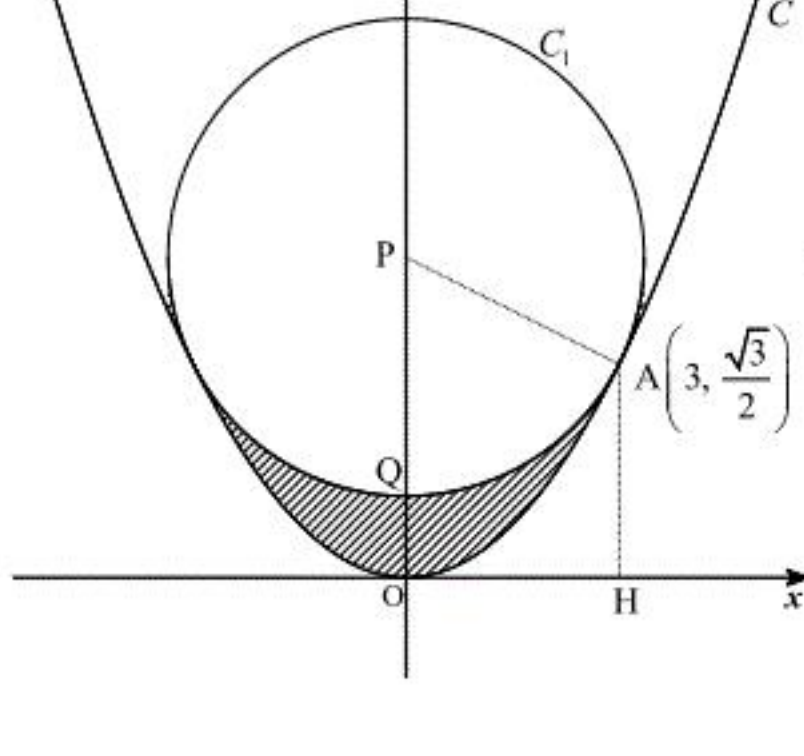
となる。よって円の方程式は、

$$x^2 + \left(y - \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 36$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + \left(y - \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 36$$

(2)



(1)で求めた円を $C_1$ とする。 $C_1$ の中心を $P$ 、 $C_1$ と $y$ 軸の交点を $Q$ 、 $A\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とし、点 $A$ から $x$ 軸に下ろした垂線の足を $H$ とする。円と放物線は $y$ 軸に関して対称であるから、求める面積は、

$$2 \cdot \{(\text{台形 OHAP の面積}) - (\text{扇形 QPA の面積}) - (\text{放物線 } C \text{ の下の部分 OHA})\}$$

・・・①

となる。ここで台形 OHAP の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 3 = 6\sqrt{3} \quad \text{・・・②}$$

となる。また、内積の定義から、

$$\begin{aligned} \cos \angle QPA &= \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PQ}}{\overline{PA} \cdot \overline{PQ}} \\ &= \frac{(3, -3\sqrt{3}) \cdot (0, -6)}{36} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \angle QPA = \frac{\pi}{6}$$

となる。よって扇形 QPA は半径 6、中心角  $\frac{\pi}{6}$  の扇形であるから、その面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 6^2 = 3\pi \quad \text{・・・③}$$

となる。放物線 $C$ の下の部分 OHA の部分の面積は、

$$\int_0^3 \frac{x^2}{6\sqrt{3}} dx = \left[ \frac{x^3}{18\sqrt{3}} \right]_0^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{・・・④}$$

となる。よって①～④より、求める面積は、

$$2 \left( 6\sqrt{3} - 3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 11\sqrt{3} - 6\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 11\sqrt{3} - 6\pi$$

(3)

求める円を $C_2$ とする。半径を $r$ とすると、 $C_2$ は $y$ 軸に接し $x$ 座標が正の部分に存在するから、中心の $x$ 座標は $r$ となる。よって中心の $y$ 座標を $s$ とすると、 $C_2$ の方程式は、

$$(x-r)^2 + (y-s)^2 = r^2$$

となる。(1)より、点 $\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における法線の方程式は $y = -\sqrt{3}x + \frac{7}{2}\sqrt{3}$ であり、 $C_2$ の中心はこの直線上に存在するから、

$$s = -\sqrt{3}r + \frac{7}{2}\sqrt{3} \quad \text{・・・⑤}$$

となる。また、 $C_2$ は点 $\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通るから、

$$(3-r)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - s\right)^2 = r^2$$

となる。上式に⑤を代入して整理すると、

$$(3-r)^2 + (\sqrt{3}r - 3\sqrt{3})^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 4(r-3)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 2(r-3) = \pm r$$

$$\therefore r = 2, 6$$

となる。よって、

$$(r, s) = \left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(6, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

となるから、求める円の方程式は、

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$$

$$(x-6)^2 + \left(y + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 36$$

となる。

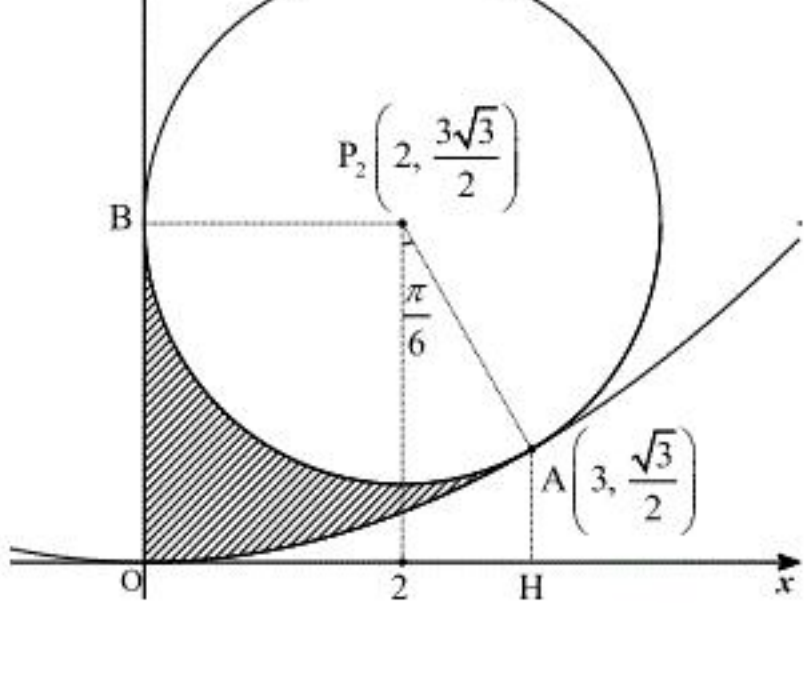
$$(\text{答}) \quad (x-2)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$$

$$(x-6)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 36$$

(4)

(3)で得られた2つの円それぞれについて考える。

$$[1] \quad (x-2)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4 \text{ のとき}$$



上のよう各点を設定する。求める面積 $S_1$ は、

$$S_1 = (\text{五角形 OBP}_2\text{AH}) - (\text{扇形 AP}_2\text{B}) - (\text{放物線の下部分 OAH})$$

となる。五角形 OBP<sub>2</sub>AH の面積は、

$$2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 1 = 4\sqrt{3}$$

となり、扇形 AP<sub>2</sub>B の面積は、

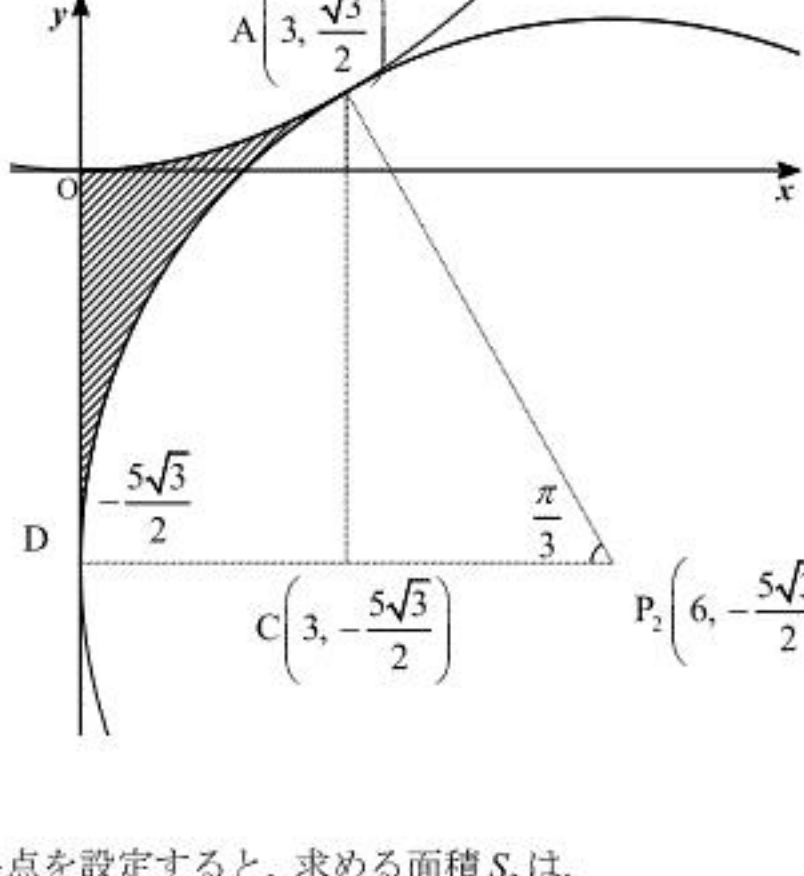
$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot 2^2 = \frac{4}{3}\pi$$

となり、放物線の下部分 OAH は④より  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  である。よって、

$$S_1 = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\pi$$

となる。

$$[2] \quad (x-6)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 36 \text{ のとき}$$



上図のように各点を設定すると、求める面積 $S_2$ は、

$$S_2 = (\text{放物線の下部分 OACD}) - (\text{扇形 AP}_2\text{D}) + (\triangle \text{AP}_2\text{C})$$

となる。放物線の下部分 OACD の面積は、④を用いて、

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

となり、扇形 AP<sub>2</sub>D の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 6^2 = 6\pi$$

となり、 $\triangle \text{AP}_2\text{C}$  の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot (6-3) \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

となるのから、求める面積は、

$$S_2 = 8\sqrt{3} - 6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2} - 6\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{円 } (x-2)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4 \text{ のとき} : \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{円 } (x-6)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 36 \text{ のとき} : \frac{25\sqrt{3}}{2} - 6\pi$$