

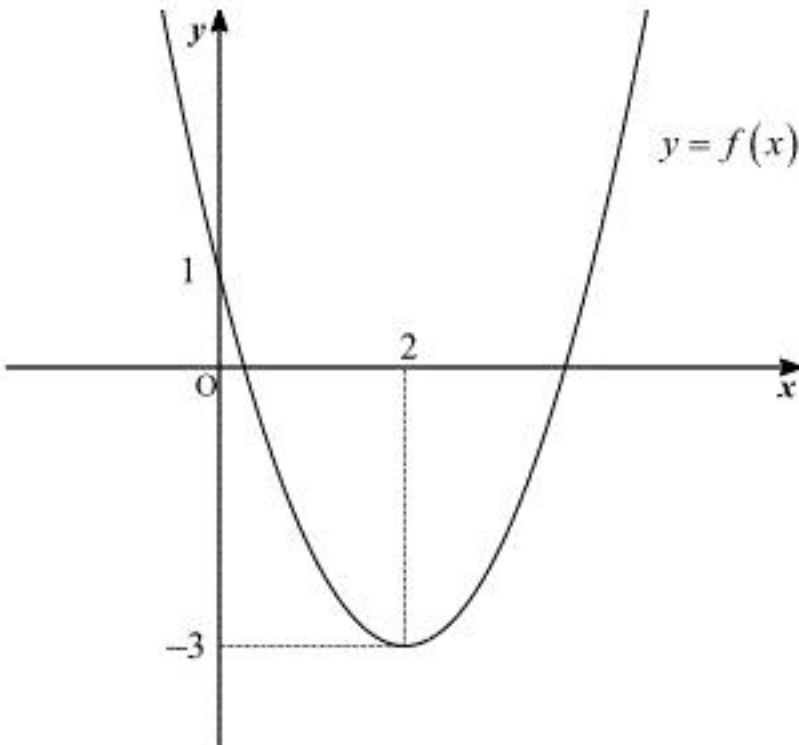
1

(1)

$a=1$ のとき、

$$f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$$

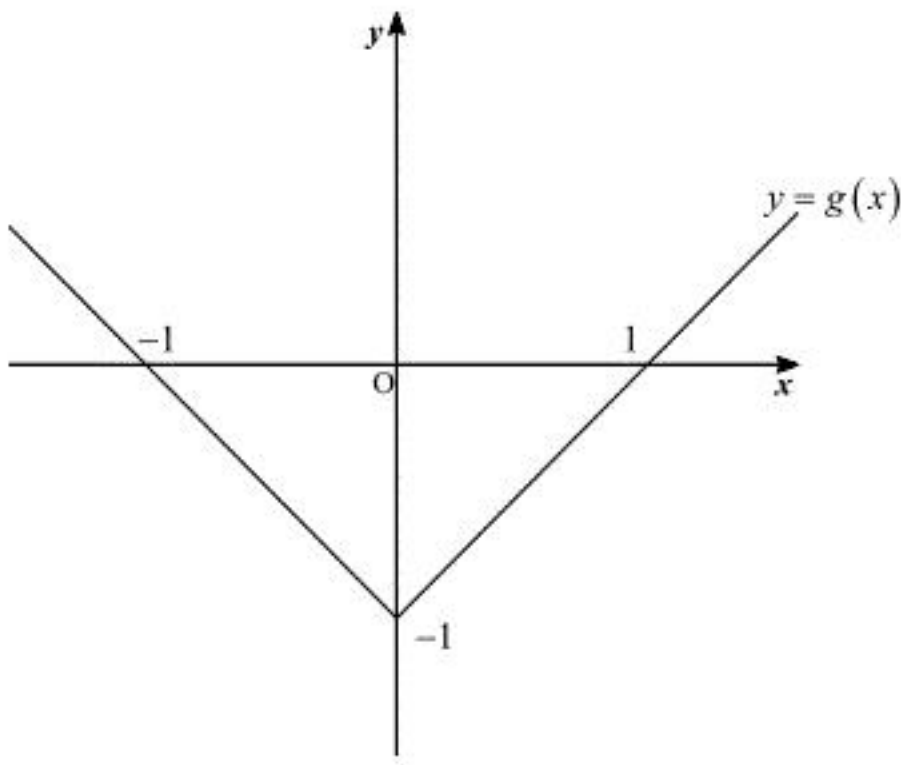
より、 $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



また、

$$g(x)=\begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

となるから、 $y=g(x)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(2)

$$f(x)=x^2-4ax+1=(x-2a)^2-4a^2+1$$

より、 $y=f(x)$ の軸は $x=2a$ となる。以下、軸と $-4 < x < 4$ の位置関係について場合分けを行う。

[1] $2a \leq -4 \Leftrightarrow a \leq -2$ のとき

$$f(-1)=2+4a \leq 2+4 \cdot (-2)=-6 < 0$$

より、 $f(x) > 0$ は常には満たされない。

[2] $-4 < 2a < 4 \Leftrightarrow -2 < a < 2$ のとき

$$f(x) \geq f(2a)=-4a^2+1$$

となるから、求める条件は

$$-4a^2+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2a)(1+2a) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

となる。

[3] $2a \geq 4 \Leftrightarrow a \geq 2$ のとき

$$f(1)=2-4a \leq 2-4 \cdot 2=-6 < 0$$

より、 $f(x) > 0$ は常には満たされない。

以上[1]～[3]より、求める a の範囲は、

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$

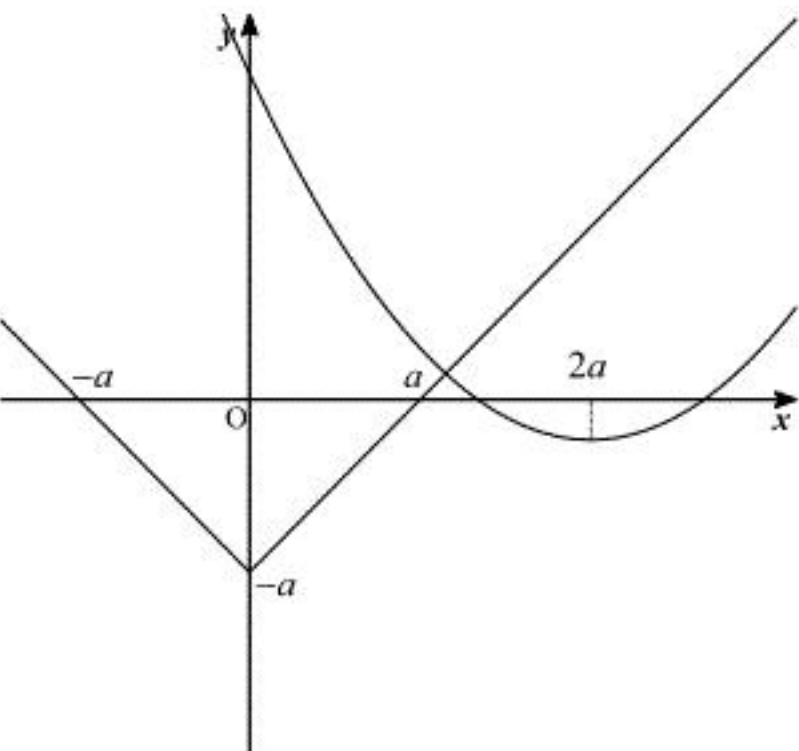
(3)

$a < 0$ のとき、すべての x について

$$g(x)=|x|-a > 0$$

となるから、 $a < 0$ は条件を満たす。また、(2)の結果より、 $0 \leq a < \frac{1}{2}$ は条件を満たす。 $a \geq \frac{1}{2}$ の

とき、 $f(x)$ と $g(x)$ の概形は以下のようになる。



よって $x > a$ において $g(x) > 0$ が満たされ、 $x < a$ において $f(x)$ は単調減少であるから、求める条件は、

$$f(a) > 0$$

$$\Leftrightarrow -3a^2 + 1 > 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because a \geq \frac{1}{2})$$

となる。したがって、 $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a < 4$ では $f(a) < 0$ かつ $g(a) = 0$ であり、 $4 \leq a$ では $-4 < x < 4$ で

$g(x) < 0$ かつ $f(1) < 0$ となり、それぞれ条件を満たさない。よって $a < \frac{1}{2}$ と合わせて、求める

a の範囲は、

$$a < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。

(答) $a < \frac{1}{\sqrt{3}}$

(1)

三角不等式より、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left| 5\sin(kx) - 6\cos(x^2) + 7 \right| \\
 &\leq 5\left| \sin(kx) \right| + 6\left| \cos(x^2) \right| + 7 \\
 &\leq 5 + 6 + 7 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

となる。ただし等号成立は

$$\sin(kx) = 1, \cos(x^2) = -1$$

のときである。よって、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)より、等号が成り立つのは

$$\sin(kx) = 1 \text{ かつ } \cos(x^2) = -1 \cdots \textcircled{1}$$

のときである。 $\sin(kx) = 1$ のとき、整数 m を用いて

$$\begin{aligned}
 \sin(kx) &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}x &= \frac{\pi}{2} + 2m\pi \\
 \Leftrightarrow x &= (4m+1)\sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned}
 x^2 &= (4m+1)^2 \pi \\
 &= (16m^2 + 8m + 1)\pi \\
 &= \{2(8m^2 + 4m) + 1\}\pi
 \end{aligned}$$

となるから、すべての整数 m に対して

$$\cos(x^2) = -1$$

が成り立つ。よってこのとき $f(x) = 18$ となり、 $m = 0$ のとき、 x の値の例として

$$x = \sqrt{\pi}$$

が挙げられる。

(答) $x = \sqrt{\pi}$

(3)

①を満たす x が存在しないことを示せばよい。

$$\begin{aligned}
 \sin(kx) &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{4}x &= \frac{\pi}{2} + 2m\pi \\
 \Leftrightarrow x &= 2(4m+1)\sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

となり、このとき、

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 4(4m+1)^2 \pi \\
 \Rightarrow \cos(x^2) &= 1
 \end{aligned}$$

となるから、①を満たす x は存在しない。したがって、 $f(x) = 18$ となるような x は存在しない。

(証明終)

(4)

①を満たす x が存在するような k の値を求めればよい。

$$\begin{aligned}
 \sin(kx) &= 1 \\
 \Leftrightarrow kx &= \frac{\pi}{2} + 2m\pi \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{2k}(4m+1)
 \end{aligned}$$

である。このとき

$$x^2 = \frac{\pi^2}{4k^2}(4m+1)^2$$

となるから、 $\cos(x^2) = -1$ より、

$$\frac{\pi(4m+1)^2}{4k^2}$$

が奇数となるような k の値を求めればよい。よって、 $\frac{\pi(4m+1)^2}{4k^2} > 0$ より自然数 l を用いると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi(4m+1)^2}{4k^2} &= 2l-1 \\
 \Leftrightarrow k^2 &= \frac{\pi(4m+1)^2}{4(2l-1)} \\
 \Leftrightarrow k &= \pm \frac{4m+1}{2\sqrt{2l-1}}\sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $k = \pm \frac{4m+1}{2\sqrt{2l-1}}\sqrt{\pi}$ (l は自然数, m は整数)

(1)

奇数をひく確率は $\frac{3}{5}$, 偶数をひく確率は $\frac{2}{5}$ である。 T_{n+1} が奇数となるのは, T_n が奇数のとき
 $n+1$ 回目に偶数のカードを引いたときまたは, T_n が偶数のとき $n+1$ 回目に奇数のカードを
 引いたときである。また, T_n が偶数である確率は $1-p_n$ であるから

$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1-p_n) = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$$

となる。

$$(答) \quad p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$$

(2)

(1)の結果より,

$$p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

となる。よって, 数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は, 初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$, 公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列であるから,

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

である。

$$(答) \quad p_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

(3)

$\left|-\frac{1}{5}\right| < 1$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(答) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$$

4

(1)

定数 p, q, r を用いて

$$f(x) = px^2 + qx + r \quad (p \neq 0)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (px^2 + qx + r) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \int_0^1 (px^2 + r) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{p}{3} x^3 + rx \right]_0^1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{p}{3} + r &= 0 \\ \therefore r &= -\frac{p}{3} \end{aligned}$$

となる。このとき,

$$\begin{aligned} a_3 &= \int_{-1}^1 (px^4 + qx^3 + rx^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (px^4 + rx^2) dx = 0 \\ &= 2 \left[\frac{p}{5} x^5 + \frac{r}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5} p + \frac{2}{3} r \\ &= \frac{8}{45} p \\ &\neq 0 \quad (\because p \neq 0) \end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)と同様に $f(x) = px^2 + qx + r \quad (p \neq 0)$ とおくと,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{3} p + 2r \\ a_2 &= \int_{-1}^1 (px^3 + qx^2 + rx) dx = 2 \left[\frac{q}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} q \\ a_3 &= \frac{2}{5} p + \frac{2}{3} r \end{aligned}$$

より,

$$\begin{cases} \frac{2}{3} p + 2r = 1 \\ \frac{2}{3} q = 0 \\ \frac{2}{5} p + \frac{2}{3} r = \frac{3}{5} \end{cases}$$

となるから,

$$(p, q, r) = \left(\frac{3}{2}, 0, 0 \right)$$

を得る。よって,

$$f(x) = \frac{3}{2} x^2$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 x^{n-1} \cdot \frac{3}{2} x^2 dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^{n+1} dx \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{3}{2(n+2)} \{1 - (-1)^n\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{3}{2(n+2)} \{1 - (-1)^n\}$$

(3)

0 でない定数 b_k と、定数 $b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_0$ を用いて,

$$f(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0$$

となる。 k が偶数のとき,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \int_{-1}^1 (b_k x^{k+2n-1} + b_{k-1} x^{k+2n-2} + \dots + b_0 x^{2n-1}) dx \\ &= 2 \int_0^1 (b_{k-1} x^{k+2n-2} + b_{k-3} x^{k+2n-4} + \dots + b_1 x^{2n}) dx \\ &= 2 \left[\frac{b_{k-1}}{k+2n-1} x^{k+2n-1} + \frac{b_{k-3}}{k+2n-3} x^{k+2n-3} + \dots + \frac{b_1}{2n+1} x^{2n+1} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{b_{k-1}}{k+2n-1} + \frac{b_{k-3}}{k+2n-3} + \dots + \frac{b_1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

となるから、三角不等式と $|b_1|, |b_2|, \dots, |b_k| \leq M$ より,

$$\begin{aligned} |a_{2n}| &= \left| 2 \left(\frac{b_{k-1}}{k+2n-1} + \frac{b_{k-3}}{k+2n-3} + \dots + \frac{b_1}{2n+1} \right) \right| \\ &\leq 2 \left(\left| \frac{b_{k-1}}{k+2n-1} \right| + \left| \frac{b_{k-3}}{k+2n-3} \right| + \dots + \left| \frac{b_1}{2n+1} \right| \right) \\ &\leq 2M \left(\left| \frac{1}{k+2n-1} \right| + \left| \frac{1}{k+2n-3} \right| + \dots + \left| \frac{1}{2n+1} \right| \right) \\ &\leq 2M \left(\left| \frac{1}{2n+1} \right| + \left| \frac{1}{2n+1} \right| + \dots + \left| \frac{1}{2n+1} \right| \right) \\ &= 2M \cdot \frac{k}{2} \left| \frac{1}{2n+1} \right| \\ &= \frac{kM}{2n+1} \\ &\leq \frac{(k+1)M}{2n+1} \end{aligned}$$

となる。また、 k が奇数のときも同様にして

$$\begin{aligned} |a_{2n}| &\leq 2 \left(\left| \frac{b_k}{k+2n} \right| + \left| \frac{b_{k-2}}{k+2n-2} \right| + \dots + \left| \frac{b_1}{2n+1} \right| \right) \\ &\leq 2M \cdot \frac{k+1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{(k+1)M}{2n+1} \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(4)

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \int_{-1}^1 x^{2n-2} f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \right)' f(x) dx \\ &= \left[\frac{x^{2n-1}}{2n-1} f(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 x^{2n-1} f'(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^{2n-1} f'(x) dx + \frac{f(1) + f(-1)}{2n-1} \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ が k 次の多項式のとき、 $f'(x)$ は $k-1$ 次の多項式であるから、(3)より $f'(x)$ の係数の絶対値のうち最大なものを M' とおけば,

$$\left| \int_{-1}^1 x^{2n-1} f'(x) dx \right| \leq \frac{kM'}{2n+1}$$

が成り立つ。よって、三角不等式より,

$$\begin{aligned} |a_{2n-1}| &= \left| \int_{-1}^1 x^{2n-1} f'(x) dx + \frac{f(1) + f(-1)}{2n-1} \right| \\ &\leq \left| \int_{-1}^1 x^{2n-1} f'(x) dx \right| + \left| \frac{f(1) + f(-1)}{2n-1} \right| \\ &\leq \frac{kM'}{2n+1} + \left| \frac{f(1) + f(-1)}{2n-1} \right| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。また、(3)の結果より,

$$|a_{2n}| \leq \frac{(k+1)M}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。したがって、はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

となる。

(証明終)