1

(1)

$\{a_n\}$は初項1，公差2の等差数列より

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

となる。

(答) $a_n = 2n - 1$

(2)

$\{b_n\}$は初項1，公比2の等比数列より

$$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

となる。

(答) $b_n = 2^{n-1}$

(3)

$a_n = 2n-1$，$b_n = 2^{n-1}$ より，$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^{k-1}$ である。したがって以下のように計算できる。

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1} \\ -) & 2S_n = & \phantom{1\cdot 1 +{}} 1\cdot 2 + \cdots + (2n-3)\cdot 2^{n-1} + (2n-1)\cdot 2^n \\ \hline & -S_n = & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + \cdots + 2\cdot 2^{n-1} - (2n-1)\cdot 2^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 4\cdot(1 + 2 + \cdots + 2^{n-2}) - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= 1 + 4\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1} - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= -(2n-3)\cdot 2^n - 3 \end{aligned}$$

よって，求める解は $S_n = (2n-3)\cdot 2^n + 3$ である。

(答) $S_n = (2n-3)\cdot 2^n + 3$

(4)

$a_n = 2n-1$ より，$T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ である。したがって

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $T_n = \frac{n}{2n+1}$

(5)

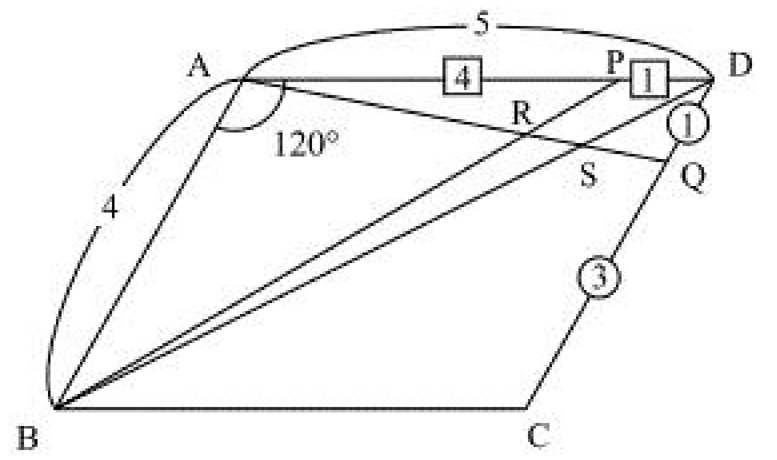
$b_n = 2^{n-1}$ より，$U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}\cdot 2^k}$ である。ここで，$\frac{1}{2^{k-1}\cdot 2^k} = \frac{1}{2^{2k-1}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ だから

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}\cdot 2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $U_n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

$\boxed{2}$



(1)

与えられた条件より

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle\mathrm{BAD}\\
&= 4\cdot5\cdot\cos120^\circ\\
&= -10
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-10$

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$

(3)

点Rは直線AQ上にあるので，実数kを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{4}k\vec{a}+k\vec{b} \qquad ・・・①$$

とかける。また，実数sを用いて$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=s:(1-s)$とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b} \qquad ・・・②$$

とかける。$\vec{a},\vec{b}$は平行でなく，共に零ベクトルに等しくないから，①，②より

$$\begin{cases}\dfrac{k}{4}=1-s\\ k=\dfrac{4}{5}s\end{cases}$$

となる。これを解くと，$k=\dfrac{2}{3},\ s=\dfrac{5}{6}$となる。ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$である。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

(4)

点Sは直線AQ上にあるので，実数pを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=p\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{4}p\vec{a}+p\vec{b}=\frac{1}{4}p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とかける。また，点Sは直線BD上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$の係数の和が1に等しくなり

$$\frac{1}{4}p+p=1$$

$$\therefore p=\frac{4}{5}$$

と計算できる。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$である。(2)の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2}{15}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

となる。ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$を計算すると

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 &= \left|\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right|^2\\
&= \frac{1}{16}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\
&= \frac{1}{16}\cdot4^2+\frac{1}{2}\cdot(-10)+5^2\\
&= 21
\end{aligned}
$$

$$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\sqrt{21}$$

となる。ゆえに，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|=\dfrac{2}{15}|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\dfrac{2}{15}\cdot\sqrt{21}=\dfrac{2\sqrt{21}}{15}$と求まる。

(答) $|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|=\dfrac{2\sqrt{21}}{15}$

3

(1)

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より,

$$f(x) = a(1-2\sin^2 x) + 2\sqrt{2}b\sin x$$
$$= -2at^2 + 2\sqrt{2}bt + a$$

となる。

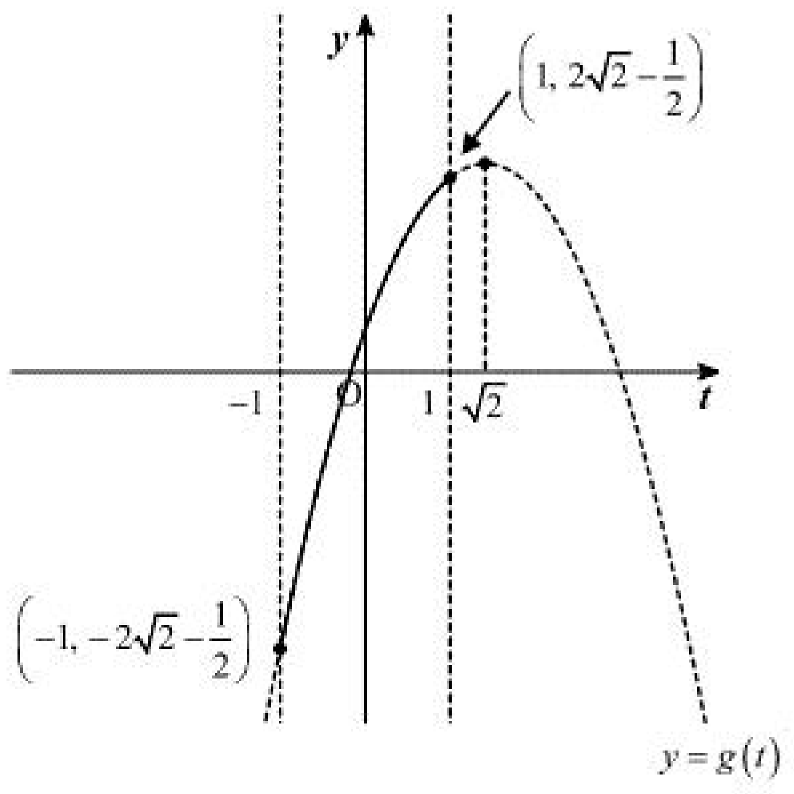
(答) $f(x) = -2at^2 + 2\sqrt{2}bt + a$

(2)

$g(t) = -2at^2 + 2\sqrt{2}bt + a$ とする。$t = \sin x$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ だから，この範囲における $g(t)$ の最大値と最小値を求めれば良い。$a = \frac{1}{2}, b = 1$ を代入すると

$$g(t) = -t^2 + 2\sqrt{2}t + \frac{1}{2}$$
$$= -(t-\sqrt{2})^2 + \frac{5}{2}$$

となる。グラフは以下のようになる。



上図より，$g(t)$ は $t=1$ で最大値 $g(1) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ をとり，$t=-1$ で最小値 $g(-1) = -2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ をとることが分かる。

(答)　最大値　$2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

最小値　$-2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

(3)

$f(x) < 2 \Leftrightarrow g(t) < 2$ だから，$f(x) < 2$ が全ての実数 x について成り立つには，

$-1 \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の最大値が 2 より小さくなる　・・・①

という条件を満たせばよい。まず，$a \neq 0$ だから $g(t)$ は平方完成することができ，

$$g(t) = -2a\left(t - \frac{b}{\sqrt{2}a}\right)^2 + \frac{a^2+b^2}{a}$$

となる。ここで，$a>0, b>0$ より，$g(t)$ は上に凸の放物線となり，軸 $t = \frac{b}{\sqrt{2}a}$ は正の値をとる。

以下，軸の値で場合分けする。

[1] $0 < \frac{b}{\sqrt{2}a} < 1$ のとき，すなわち $b < \sqrt{2}a$ のとき

$g(t)$ は $t = \frac{b}{\sqrt{2}a}$ において最大値 $g\left(\frac{b}{\sqrt{2}a}\right) = \frac{a^2+b^2}{a}$ をとる。よって，①より

$$\frac{a^2+b^2}{a} < 2$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 < 2a \ (\because a > 0)$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 < 1$$

となればよい。

[2] $\frac{b}{\sqrt{2}a} \geqq 1$ のとき，すなわち $b \geqq \sqrt{2}a$ のとき

$g(t)$ は $t=1$ において最大値 $g(1) = -a + 2\sqrt{2}b$ をとる。よって，①より

$$-a + 2\sqrt{2}b < 2$$
$$\Leftrightarrow b < \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。

ここで，円 $(a-1)^2 + b^2 = 1$ と直線 $b = \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ の共有点を考える。2 式を連立すると，

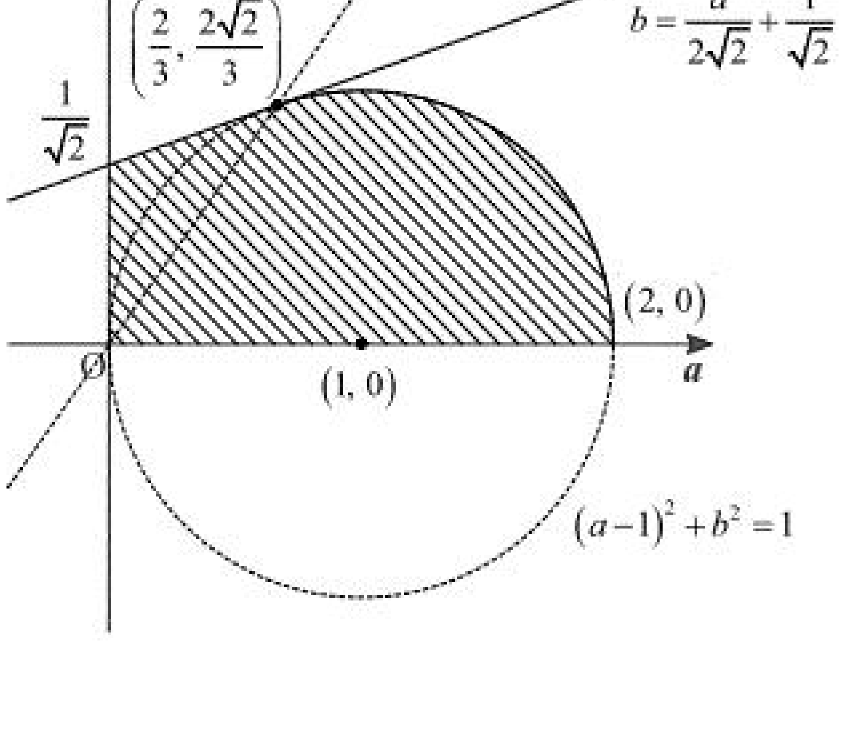
$$(a-1)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow 9a^2 - 12a + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3a-2)^2 = 0$$
$$\therefore a = \frac{2}{3} \ \ (\text{重解})$$

となる。このとき

$$b = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。よって，直線 $b = \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ は円 $(a-1)^2 + b^2 = 1$ に点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ で接する。なお，この点は直線 $b = \sqrt{2}a$ 上にある。

以上[1], [2]より，求める領域は下図の斜線部となる。境界線は含まない。



(答) 前図

$\boxed{4}$

(1)

$f(x)=2(x+1)^2-3$ と平方完成できるから，C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y&=2\{(x-4)+1\}^2-3+16\\ &=2(x-3)^2+13\\ &=2x^2-12x+31 \end{aligned}$$

と求まる。

(答)　$y=2x^2-12x+31$

(2)

$f'(x)=4x+4$ だから，点 P における C_1 の接線の方程式は

$$\begin{aligned} &y-f(t)=f'(t)(x-t)\\ &\Leftrightarrow y=(4t+4)(x-t)+2t^2+4t-1\\ &\therefore y=(4t+4)x-2t^2-1 \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

と求まる。

(答)　$y=(4t+4)x-2t^2-1$

(3)

C_2 の方程式を $g(x)=2x^2-12x+31$ とおくと，$g'(x)=4x-12$ である。したがって，s を実数とするとき，点 $(s,\ g(s))$ における C_2 の接線の方程式は

$$\begin{aligned} &y-g(s)=g'(s)(x-s)\\ &\Leftrightarrow y=(4s-12)(x-s)+2s^2-12s+31\\ &\therefore y=(4s-12)x-2s^2+31 \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

と求まる。接線①と接線②が一致するときの直線の方程式が求める方程式だから，①と②の係数比較をして

$$\begin{cases} 4t+4=4s-12\\ -2t^2-1=-2s^2+31 \end{cases}$$

となる。これを解くと，$s=4,\ t=0$ となる。よって直線 l の方程式は，$y=4x-1$ となる。

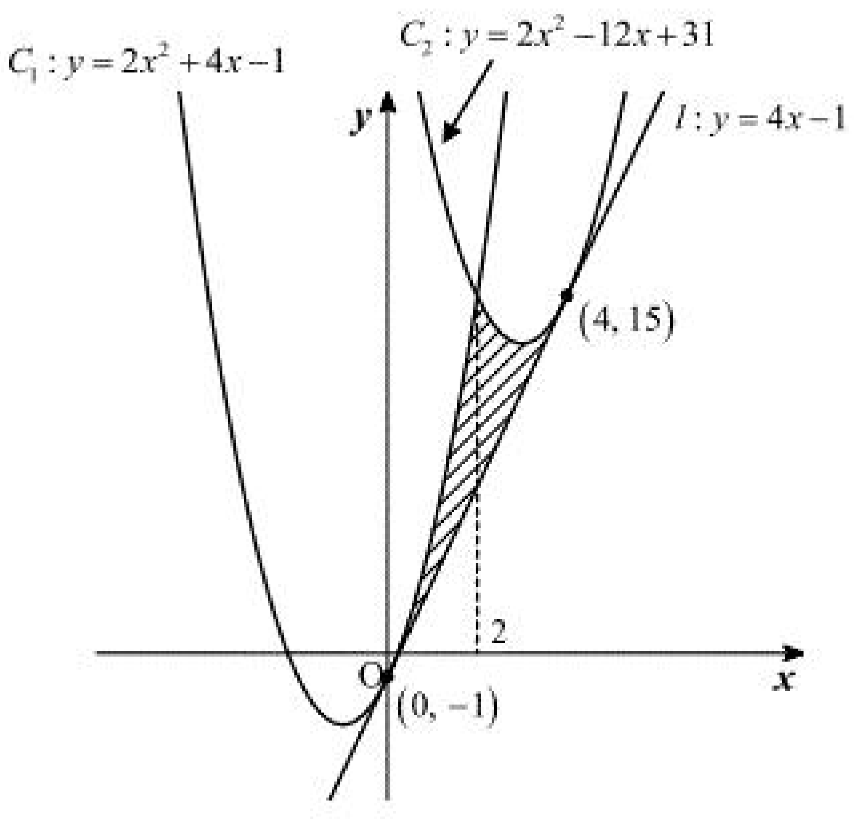
(答)　$y=4x-1$

(4)

(3)より $s=4,\ t=0$ だから，直線 l と C_1 の接点は $(0,-1)$，直線 l と C_2 の接点は $(4,15)$ と求まる。
また，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は，2 式を連立して

$$\begin{aligned} &2x^2+4x-1=2x^2-12x+31\\ &\Leftrightarrow 16x=32\\ &\therefore x=2 \end{aligned}$$

と求まる。したがって，2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 l で囲まれた領域は下図の斜線部のようになる。



上図の斜線部の面積を求めれば良い。よって，

$$\begin{aligned} &\int_0^2\{(2x^2+4x-1)-(4x-1)\}dx+\int_2^4\{(2x^2-12x+31)-(4x-1)\}dx\\ &=2\int_0^2 x^2dx+2\int_2^4(x-4)^2dx\\ &=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+2\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4\\ &=\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\\ &=\frac{32}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(答)　$\dfrac{32}{3}$