$\boxed{1}$

(1)

曲線 $C: x^2+3y^2=4$ の両辺を x で微分して

$$2x+6y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

となる。したがって $y\neq 0$ とするとき，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{3y}$ である。よって，P における接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{3\cdot 1}(x-1)+1$$
$$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

と求まる。

(答)　$y=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{3}$

(2)

直線 l_m の方程式は，$y=m(x-1)+1$ とかける。曲線 $C: x^2+3y^2=4$ と連立して交点を求めると，

$$x^2+3m^2(x-1)^2+6m(x-1)+3=4$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\{(3m^2+1)x-3m^2+6m+1\}=0$$
$$\Leftrightarrow x=1,\ \frac{3m^2-6m-1}{3m^2+1}\ (\because 3m^2+1>0)$$

となる。$a_m\neq 1$ より，$a_m=\dfrac{3m^2-6m-1}{3m^2+1}$ と求まる。そして直線 l_m は点 Q_m を通るから，b_m は

$$\begin{aligned}b_m&=m(a_m-1)+1\\&=m\cdot\left(\frac{-3m^2-6m-1}{3m^2+1}-1\right)+1\\&=\frac{-3m^2-2m+1}{3m^2+1}\end{aligned}$$

と求まる。

(答)　$(a_m,b_m)=\left(\dfrac{3m^2-6m-1}{3m^2+1},\dfrac{-3m^2-2m+1}{3m^2+1}\right)$

(3)

m が有理数のとき，整数 p,q (ただし $p\neq 0$)を用いて $m=\dfrac{q}{p}$ とかける。このとき，

$$a_m=\frac{3\left(\dfrac{q}{p}\right)^2-6\dfrac{q}{p}-1}{3\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+1}=\frac{-p^2-6pq+3q^2}{p^2+3q^2}$$

であり，p,q は整数だから，a_m の分母，分子はともに整数となる。よって a_m は有理数である。

また，b_m に $m=\dfrac{q}{p}$ を代入すると，

$$b_m=\frac{-3\left(\dfrac{q}{p}\right)^2-\dfrac{2q}{p}+1}{3\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+1}=\frac{p^2-2pq-3q^2}{p^2+3q^2}$$

となる。p,q は整数だから，b_m の分母，分子はともに整数となる。よって b_m は有理数である。ゆえに，題意は示された。

(証明終)

(4)

a_m の値に応じて次のように場合分けする。

[1]　$a_m\neq 1$ のとき

定義より，直線 PQ_m の傾きは直線 l_m の傾きに等しいから

$$m=\frac{b_m-1}{a_m-1}$$

である。a_m, b_m がともに有理数のとき，整数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ (ただし $\alpha\neq 0,\gamma\neq 0,\alpha\neq\beta$)を用いて $a_m=\dfrac{\beta}{\alpha}, b_m=\dfrac{\delta}{\gamma}$ とかけるから

$$m=\frac{\dfrac{\delta}{\gamma}-1}{\dfrac{\beta}{\alpha}-1}=\frac{\alpha(\delta-\gamma)}{\gamma(\beta-\alpha)}$$

となる。$\alpha(\delta-\gamma)$，$\gamma(\beta-\alpha)$ はともに整数だから m は有理数となる。

[2]　$a_m=1$ のとき

$$1=\frac{3m^2-6m-1}{3m^2+1}$$
$$\Leftrightarrow 3m^2+1=3m^2-6m-1$$
$$\therefore m=-\frac{1}{3}$$

と求まる。よって，m は有理数となる。

以上[1], [2]より，題意は示された。

(証明終)

$\boxed{2}$

(1)

$a_1=\sqrt{4^1+2^2+29}=\sqrt{37}$ であり，$6^2<37<7^2$ より $6<a_1<7$ だから $[a_1]=6$ である。また，

$a_2=\sqrt{4^2+2^{2+1}+29}=\sqrt{53}$ であり，$7^2<53<8^2$ より $7<a_2<8$ だから $[a_2]=7$ である。そして

$a_3=\sqrt{4^3+2^{3+1}+29}=\sqrt{109}$ であり，$10^2<109<11^2$ より $10<a_3<11$ だから $[a_3]=10$ である。

(答) $[a_1]=6, [a_2]=7, [a_3]=10$

(2)

$$\left(2^n+1\right)^2-{a_n}^2=\left(4^n+2^{n+1}+1\right)-\left(4^n+2^{n+1}+29\right)=-28<0$$

が成り立つ。また，

$$\left(2^n+2\right)^2-{a_n}^2=\left(4^n+2^{n+2}+4\right)-\left(4^n+2^{n+1}+29\right)=2^{n+1}-25$$

であり，2^{n+1} は n に対して単調に増加し，$2^{4+1}-25=7>0$ である。したがって $n\geqq 4$ で

$$\left(2^n+1\right)^2<a_n^2<\left(2^n+2\right)^2$$

である。$2^n+1, a_n, 2^n+2$ はいずれも正の値を取るから，

$$2^n+1<a_n<2^n+2$$

となる。よって，$n\geqq 4$ で $[a_n]=2^n+1$ であることが示された。

(証明終)

(3)

(2)より，n が十分に大きいときは $[a_n]=2^n+1$ と考えてよい。このとき，

$$\begin{aligned}\langle a_n\rangle&=a_n-[a_n]\\&=\sqrt{4^n+2^{n+1}+29}-\left(2^n+1\right)\\&=\frac{4^n+2^{n+1}+29-\left(2^n+1\right)^2}{\sqrt{4^n+2^{n+1}+29}+2^n+1}\\&=\frac{28}{\sqrt{4^n+2^{n+1}+29}+2^n+1}\end{aligned}$$

となる。よって $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4^n+2^{n+1}+29}+2^n+1\right)=\infty$ より，$\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n\rangle=0$ である。

(答) $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n\rangle=0$

(4)

$n\geqq 4$ のとき，与えられた条件式を変形して

$$\langle a_n\rangle\leqq\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4^n+2^{n+1}+29}-\left(2^n+1\right)\leqq\frac{1}{8}\ (\because (2)\text{ より})$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{4^n+2^{n+1}+29}\leqq 8\cdot 2^n+9 \qquad\cdots①$$

を解けばよい。①の両辺はともに正だから，2 乗しても同値であり

$$8^2\left(4^n+2^{n+1}+29\right)\leqq\left(8\cdot 2^n+9\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 64\cdot 4^n+128\cdot 2^n+1856\leqq 64\cdot 4^n+144\cdot 2^n+81$$

$$\Leftrightarrow 16\cdot 2^n\geqq 1775$$

$$\Leftrightarrow 2^n\geqq\frac{1775}{16}=110.9\cdots \qquad\cdots②$$

となる。2^n は n に対して単調増加し，$2^6=64<\dfrac{1775}{16}<2^7=128$ だから，②を満たす n は 7 以上のすべての自然数である。

(答) $n\geqq 7$ を満たす全ての自然数

3

(1)

直前の数よりも小さい数が並ぶことを「数字が下降する」と呼ぶことにする。数字が下降する位置で以下のように場合分けできる。

[1] 2番目で下降するとき

1番目の数は2, 3, 4の3通りであり、その各々について2番目から4番目の数字の並び方は一意に定まる。よって，3通り存在する。

[2] 3番目で下降するとき

1番目と2番目の数のとり方は$(1,2)$以外の${}_4\mathrm{C}_2-1=5$(通り)存在し，その各々について4つの数の並び方は一意に定まる。よって，5通り存在する。

[3] 4番目で下降するとき

4番目の数は1, 2, 3の3通りであり，その各々について1番目から3番目の数字の並び方は一意に定まる。よって，3通り存在する。

以上[1], [2], [3]より，求める場合の数は$3+5+3=11$(通り)となる。

(答) 11通り

(2)

1個の整数の順列では下降回数が0となるから，$a_1=0$である。以下，$n \geqq 2$の場合を考える。kを自然数(ただし$1 \leqq k \leqq n-1$)とする。$k+1$番目で下降する場合の1番目からk番目までの数のとり方は，n個の数からk個選ぶ組み合わせの数から$(1, 2, \dots, k)$の1通りをのぞくから，合計で${}_n\mathrm{C}_k-1$通りである。その各々について，1番目からk番目及び$k+1$番目からn番目までの数を小さい順に並べれば下降回数が1の順列が得られるから，n個の数の並べ方は一意に定まる。$k=1, 2, \dots, n-1$の場合は全て排反だから，求める場合の数は

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left({}_n\mathrm{C}_k-1\right)=\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k-1\right)$$

となる。これは$n=1$のときも成立する。よって，題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)の結果より$a_n=\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k-1\right)$だから，二項定理を利用して

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k-1\right)\\&=\left({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n\right)-(n+1)\\&=2^n-n-1\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n=2^n-n-1$

(4)

2個の整数の順列では下降回数が1以下となるから，$b_2=0$である。以下，$n \geqq 3$の場合を考える。kを自然数(ただし$1 \leqq k \leqq n-2$)として考える。2番目から$n-k$番目の数のどこかで1回目の下降，$n-k+1$番目の数で2回目の下降が起こるとする。まず，$n-k+1$個目の数からn個目の数の選び方が${}_n\mathrm{C}_k$通りであり，その各々について$n-k$個目の数までに1回下降する場合の数はa_{n-k}だから，$a_1=0$に注意するとこの場合の数は

$$\sum_{k=1}^{n-2}{}_n\mathrm{C}_k a_{n-k}=\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k a_{n-k}\ (\text{通り}) \qquad \cdots ①$$

となる。だが，①には，$n-k+1$個目の数で下降しないで1回目の下降しか存在しない場合も含まれる。そこで，1回目でしか下降しない場合の数を考える。mを自然数(ただし$2 \leqq m \leqq n-1$)として考える。①のなかでm番目の数でしか下降しない場合，2回目に下降すべきだった場所は$n-k+1=m+1, m+2, \dots, n$の$n-m$通り存在し，その各々について1番目から$m-1$番目までの数の選び方は(2)と同様に考えて${}_n\mathrm{C}_{m-1}-1$通り存在する。つまり，この場合の数は

$$\begin{aligned}&\sum_{m=2}^{n-1}(n-m)\left({}_n\mathrm{C}_{m-1}-1\right)\\&=\sum_{m=2}^{n}(n-m)\left({}_n\mathrm{C}_{n-m+1}-1\right)\\&=(n-2)\left({}_n\mathrm{C}_{n-1}-1\right)+(n-3)\left({}_n\mathrm{C}_{n-2}-1\right)+\cdots+0\cdot\left({}_n\mathrm{C}_1-1\right)\\&=0\cdot\left({}_n\mathrm{C}_1-1\right)+1\cdot\left({}_n\mathrm{C}_2-1\right)+\cdots+(n-2)\left({}_n\mathrm{C}_{n-1}-1\right)\\&=\sum_{m=1}^{n-1}(m-1)\left({}_n\mathrm{C}_m-1\right) \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

である。したがって，求める場合の数は①から②を引いたものであり

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k a_{n-k}-\sum_{m=1}^{n-1}(m-1)\left({}_n\mathrm{C}_m-1\right)$$

となる。これは$n=2$のときも成立する。よって，題意は示された。

(証明終)

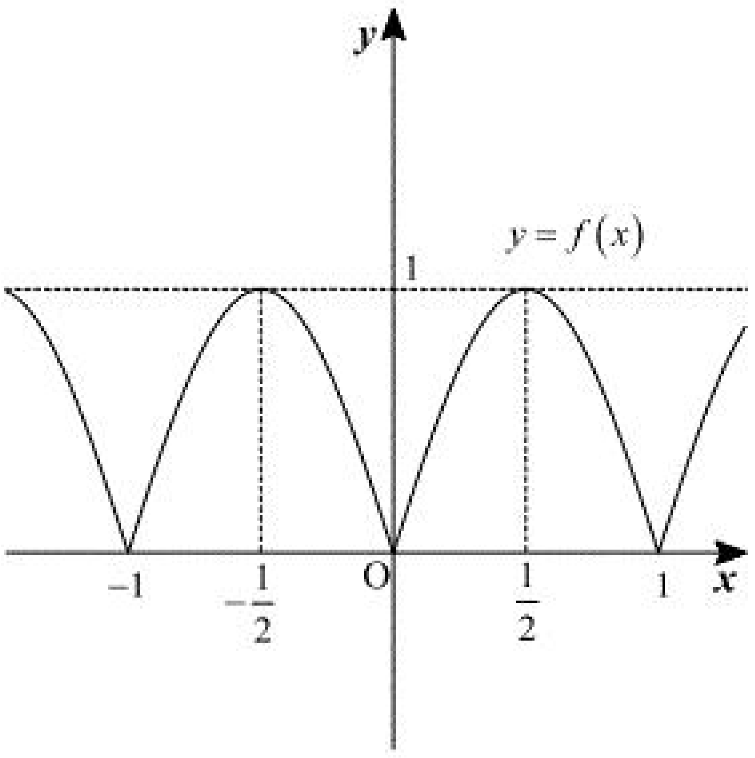
4

(1)

k を整数として

$$f(x)=|\sin(\pi x)|=\begin{cases}\sin(\pi x) & (2k\leqq x\leqq 2k+1)\\ -\sin(\pi x) & (2k+1\leqq x\leqq 2k+2)\end{cases}$$

となる。よってグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(2)

$0\leqq x\leqq 1$ で $\sin(\pi x)\geqq 0$ より，$f(x)=|\sin(\pi x)|=\sin(\pi x)$ となる。したがって，

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx&=\int_0^1 e^{-x}\sin(\pi x)\,dx\\&=\left[-e^{-x}\sin(\pi x)\right]_0^1+\pi\int_0^1 e^{-x}\cos(\pi x)\,dx\\&=\pi\left[-e^{-x}\cos(\pi x)\right]_0^1-\pi^2\int_0^1 e^{-x}\sin(\pi x)\,dx\\&=\pi\left(e^{-1}+1\right)-\pi^2\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx\end{aligned}$$

と計算できるから，

$$\left(1+\pi^2\right)\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx=\pi\left(\frac{1}{e}+1\right)$$

$$\therefore\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx=\frac{\pi}{1+\pi^2}\left(\frac{1}{e}+1\right)$$

と求まる。

(答) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx=\frac{\pi}{1+\pi^2}\left(\frac{1}{e}+1\right)$

(3)

$\displaystyle I_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}e^{-x}|\sin(\pi x)|\,dx$ である。ここで，$t=x-(k-1)$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$ であり，積分区間の対応表は以下のようになる。

x	$k-1$	$\to$	k
t	0	$\to$	1

したがって，

$$\begin{aligned}\int_{k-1}^{k}e^{-x}|\sin(\pi x)|\,dx&=\int_0^1 e^{-t-(k-1)}\left|\sin\{\pi(k-1)+\pi t\}\right|dt\\&=e^{-(k-1)}\int_0^1 e^{-t}\left|(-1)^{k-1}\sin(\pi t)\right|dt\\&=e^{-(k-1)}\int_0^1 e^{-t}\sin(\pi t)\,dt\\&=e^{-(k-1)}\cdot\frac{\pi}{\pi^2+1}\left(\frac{1}{e}+1\right)\quad(\because (2)\text{の結果})\end{aligned}$$

となる。つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{\pi^2+1}\left(\frac{1}{e}+1\right)\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(k-1)}$ である。これは初項 $\dfrac{\pi}{\pi^2+1}\left(\dfrac{1}{e}+1\right)$，公比 e^{-1} の無限等比級数であり，$\left|e^{-1}\right|<1$ より収束する。よって，

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{\pi^2+1}\left(\frac{1}{e}+1\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{\pi}{\pi^2+1}\cdot\frac{e+1}{e-1}$$

と求まる。

(答) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{\pi^2+1}\cdot\frac{e+1}{e-1}$