

平成 29 年度 入学試験問題(前期日程)

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間 120 分

理工学部：数学物理学科・情報科学科

医学部：医学科

問題冊子 問題…… 1 ～ 4 ページ…… 1 ～ 2

解答用紙…… 4 枚

下書用紙…… 1 枚

配 点……理工学部は表示のとおり。医学部は表示の 0.75 倍とする。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に、問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
なお、解答用紙には、必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは、切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は、持ち帰らないこと。
7. 試験終了後、問題冊子、下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後、指示があるまでは退室しないこと。

- 1 曲線 $C: x^2 + 3y^2 = 4$ と、その上の点 $P(1, 1)$ を考える。実数 m に対して、 P を通る傾き m の直線を l_m とし、 l_m と C との交点で、 P と異なるものを $Q_m(a_m, b_m)$ とおく。ただし、 l_m が C と接する場合には、 $Q_m = P$ と決めることにする。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) 曲線 C の P における接線の方程式を求めよ。
- (2) Q_m の座標 (a_m, b_m) を m を用いて表せ。
- (3) m が有理数のとき、 a_m, b_m はともに有理数であることを示せ。
- (4) a_m, b_m がともに有理数のとき、 m は有理数であることを示せ。

- 2 一般項が $a_n = \sqrt{4^n + 2^{n+1} + 29}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の第 n 項 a_n の値を越えない最大の整数を $[a_n]$ と表す。また、 $\langle a_n \rangle = a_n - [a_n]$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) $[a_1], [a_2]$, および $[a_3]$ のそれぞれの値を求めよ。
- (2) $n \geq 4$ を満たすすべての整数 n に対して、 $[a_n] = 2^n + 1$ であることを示せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n \rangle$ を求めよ。
- (4) $\langle a_n \rangle \leq \frac{1}{8}$ を満たす 4 以上の整数 n をすべて求めよ。

- 3 n は正の整数とする。1 から n までの異なる n 個の整数の順列を考える。以下そのような順列に対して、直前の数よりも小さい数が並ぶ回数を「下降回数」と呼ぶ。例えば、 $n = 4$ のとき、1432 では 4 の次に 3、3 の次に 2 が並んでいるので下降回数は 2 である。同様に 1234、1324、4321 の下降回数はそれぞれ 0、1、3 である。下降回数が 1 である順列の総数を a_n 、下降回数が 2 である順列の総数を b_n とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) a_4 を求めよ。
- (2) $a_n = \sum_{k=0}^n ({}_nC_k - 1)$ であることを示せ。
- (3) a_n を求めよ。
- (4) $n \geq 2$ のとき、 $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k a_{n-k} - \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)({}_nC_m - 1)$ であることを示せ。

- 4 すべての実数 x に対して $f(x) = |\sin(\pi x)|$ で定義される関数 $f(x)$ について、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) 定積分 $\int_0^1 e^{-x} f(x) dx$ を求めよ。
- (3) 自然数 n に対し、 $I_n = \int_0^n e^{-x} f(x) dx$ とおく。このとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

