

(1)

以下(1), (2)では7を法として考える。 x が7で割ると3余るような整数のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x + 105 \\ &\equiv 3^2 + 3 \\ &\equiv 5 \end{aligned}$$

となる。よって $f(x)$ を7で割った余りは5である。

(証明終)

(1)[別解]

x が7で割ると3余るような整数のとき、整数 k を用いて $x = 7k + 3$ と表すことができる。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x + 105 \\ &= (7k + 3)^2 + (7k + 3) + 105 \\ &= 7(7k^2 + 7k + 16) + 5 \end{aligned}$$

となる。 $7k^2 + 7k + 16$ は整数であるから、 $f(x)$ を7で割った余りは5である。

(証明終)

(2)

$a_1 = 52 \equiv 3$ であるから、(1)より、 $a_2 \equiv 5$ である。さらに同様にして、

$$\begin{aligned} a_3 &\equiv 5^2 + 5 + 105 \equiv 2 \\ a_4 &\equiv 2^2 + 2 + 105 \equiv 6 \\ a_5 &\equiv 6^2 + 6 + 105 \equiv 0 \end{aligned}$$

である。以下、数学的帰納法を利用して、 $n > 4$ で a_n が7の倍数であることを示す。

[1] $n = 5$ のとき

上記から $a_5 \equiv 0$ である。

[2] $n = k$ のとき

このとき a_n が7の倍数であると仮定すると

$$a_{k+1} \equiv a_k^2 + a_k + 105 \equiv 0$$

である。すなわち、 $n = k + 1$ でも a_n が7の倍数であることが示された。

以上、[1], [2]より、 $n > 4$ で a_n は7の倍数である。

(証明終)

(2)[別解]

105は7の倍数であるから、 $f(x)$ を7で割ったときの余りは $x^2 + x$ を7で割ったときの余りに等しい。また、 x を q で割ったときの余りが r ($0 \leq r \leq q - 1$) であるとき、整数 k を用いて $x = qk + r$ と表すことができる。このとき、

$$x^2 + x = (qk + r)^2 + (qk + r) = q\{qk^2 + (qr + 1)k\} + r^2 + r$$

であり、 $qk^2 + (qr + 1)k$ は整数であるから、 $x^2 + x$ を q で割ったときの余りは $r^2 + r$ を q で割ったときの余りに等しい。以上より、 $f(x)$ を7で割ったときの余りは、 x を7で割ったときの余りを r_i とすると $r_i^2 + r_i$ を7で割ったときの余りに等しい。 $a_1 = 52 = 7 \cdot 7 + 3$ より、 a_1 を7で割ったときの余りは3であるから、 $a_2 = f(a_1)$ を7で割ったときの余りは $3^2 + 3 = 12 = 7 + 5$ であることから5である。同様に、 $5^2 + 5 = 30 = 7 \cdot 4 + 2$ より、 a_3 を7で割ったときの余りは2であり、 $2^2 + 2 = 6$ より、 a_4 を7で割ったときの余りは6、 $6^2 + 6 = 42 = 7 \cdot 6$ より、 a_5 を7で割ったときの余りは0である。このことから数学的帰納法を利用して、 $n > 4$ で a_n が7の倍数であることを示す。

[1] $n = 5$ のとき

上記から a_5 は7の倍数である。

[2] $n = k$ のとき

このとき a_k が7の倍数であると仮定すると、 a_k を7で割ったときの余りは0であるから、 $0^2 + 0 = 0$ より、 a_{k+1} を7で割ったときの余りも0である、つまり、 a_{k+1} も7の倍数である。

以上、[1], [2]より、 $n > 4$ のとき、 a_n は7の倍数であることが示された。

(証明終)

(3)

数学的帰納法を利用して、任意の自然数 n において、 a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1、 n が奇数のとき2であることを示す。

[1] $n = 1, 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= 52 \equiv 2 \pmod{5} \\ a_2 &\equiv 2^2 + 2 + 105 \equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

であるから、 $n = 1, 2$ で成り立つ。

[2] $n = 2k - 1$ (k は自然数) のとき

このとき、 $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ であると仮定する。 a_{2k} は、

$$\begin{aligned} a_{2k} &\equiv a_{2k-1}^2 + a_{2k-1} + 105 \\ &\equiv 2^2 + 2 + 105 \\ &\equiv 4 + 2 + 0 \\ &\equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

であり、 a_{2k+1} は、

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &\equiv a_{2k}^2 + a_{2k} + 105 \\ &\equiv 1^2 + 1 + 105 \\ &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

であるから、 $n = 2k$ のとき、 $a_n \equiv 1 \pmod{5}$ 、 $n = 2k + 1$ のとき、 $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ が成り立つ。

以上、[1], [2]より、任意の自然数 n において、 a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1、 n が奇数のとき2であることを示された。よって、 $n > 4$ のとき、 a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1、 n が奇数のとき2であることを示された。

(答) n が偶数のとき1、 n が奇数のとき2

(3)[別解]

105は5の倍数であるから、(2)[別解]と同様に考える。 $a_1 = 52 = 5 \cdot 10 + 2$ であるから、 a_1 を5で割ったときの余りは2である。また、 $2^2 + 2 = 6 = 5 + 1$ より、 a_2 を5で割ったときの余りは1であり、 $1^2 + 1 = 2$ より、 a_3 を5で割ったときの余りは1である。これらから、 n が奇数のとき、 a_n を5で割ったときの余りは2であり、 n が偶数のとき、 a_n を5で割ったときの余りは1であると予測できる。よって、数学的帰納法を利用して、任意の自然数 n において、 a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1、 n が奇数のとき2であることを示す。

[1] $n = 1, 2$ のとき

$a_1 = 52$ より、 a_1 を5で割ったときの余りは2である。
また、 $2^2 + 2 = 6 = 5 + 1$ より、 a_2 を5で割ったときの余りは1である。

[2] $n = 2k - 1$ (k は自然数) のとき

このとき、 a_{2k-1} を5で割ったときの余りは2であると仮定すると、 $2^2 + 2 = 6 = 5 + 1$ より、 a_{2k} を5で割ったときの余りは1であり、 $1^2 + 1 = 2$ より、 a_{2k+1} を5で割ったときの余りは2である。

以上、[1], [2]より、任意の自然数 n において、 a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1、 n が奇数のとき2であることを示された。よって、 $n > 4$ のとき、 a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1、 n が奇数のとき2であることを示された。

(答) n が偶数のとき1、 n が奇数のとき2

(4)

以下3を法として考えると、 $a_1 = 52 \equiv 1$ であるから、

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 1^2 + 1 + 105 \equiv 2 \\ a_3 &\equiv 2^2 + 2 + 105 \equiv 0 \end{aligned}$$

とわかる。また、 $a_n \equiv 0$ のとき $a_{n+1} \equiv 0$ であるから、上記同様に $n > 3$ で a_n は3の倍数である。このことと(2), (3)より、 $n > 4$ において3と7の倍数であり、5の倍数ではない。一方、 $a_{n+1} = a_n(a_n + 1) + 105$ であるから、ユークリッドの互除法より、 a_n と a_{n+1} の最大公約数は a_n と105の最大公約数に等しい。よって、 $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ であることを考慮して、 a_n と a_{n+1} の最大公約数は $3 \cdot 7 = 21$ である。

(証明終)

(4)[別解]

105は3の倍数であるから、(2)[別解]と同様に考える。 $a_1 = 52 = 3 \cdot 17 + 1$ より、 a_1 を3で割ったときの余りは1であり、 $1^2 + 1 = 2$ より a_2 を3で割ったときの余りは2、 $2^2 + 2 = 6 = 3 \cdot 2$ より、 a_3 を3で割ったときの余りは0である。また、 $0^2 + 0 = 0$ であるから、 a_n を3で割ったときの余りは0であるとき a_{n+1} を3で割ったときの余りも0であり、 $n \geq 4$ のとき、帰納的に a_n を3で割ったときの余りは0である。このことと(2)および(3)から、 $n > 4$ のとき、 a_n は3の倍数であり7の倍数であるが5の倍数ではない。3と7は互いに素であるから、 $n > 4$ のとき、 a_n は21の倍数である。また、

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 105 \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n(a_n + 1) + 105$$

より、ユークリッドの互除法から、 a_{n+1} と a_n の最大公約数は a_n と105の最大公約数に等しい。 $n > 4$ のとき、 a_n は21の倍数であり、 $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ であることから、その最大公約数は21である。

(証明終)

(1)

$\log_{10} 2 = 0.3010$ より,

$$\begin{aligned}\log_{10} 5^{2018} &= 2018 \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= 2018(1 - \log_{10} 2) \\ &= 2018 \cdot 0.6990 \\ &= 1410.582\end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}1410 &< \log_{10} 5^{2018} < 1411 \\ \Leftrightarrow 10^{1410} &< 5^{2018} < 10^{1411}\end{aligned}$$

であるから, 5^{2018} は 1411 桁である。

(答) 1411 桁

(1)[別解]

$\log_{10} 2 = 0.3010$ より, $2 = 10^{0.3010}$ であるから,

$$\begin{aligned}5 &= \frac{10}{2} \\ &= \frac{10}{10^{0.3010}} \\ &= 10^{0.6990}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 5^{2018} &= (10^{0.6990})^{2018} \\ &= 10^{1410.582}\end{aligned}$$

である。したがって, $10^{1410} < 5^{2018} < 10^{1411}$ であるから, 5^{2018} は 1411 桁である。

(答) 1411 桁

(2)

題意より, $\log_{10} 3 = 0.4771$ であり, また,

$$\begin{aligned}\log_{10} 4 &= \log_{10} 2^2 \\ &= 2 \cdot 0.3010 \\ &= 0.6020\end{aligned}$$

であるから, (1)より,

$$\begin{aligned}1410.4771 &< 1410.582 < 1410.6020 \\ \Leftrightarrow 1410 + \log_{10} 3 &< \log_{10} 5^{2018} < 1420 + \log_{10} 4 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 10^{1410} &< 5^{2018} < 4 \cdot 10^{1410}\end{aligned}$$

である。したがって, 5^{2018} の最高位の数は 3 である。

(答) 3

(2)[別解]

$5^{2018} = 10^{1410.582} = 10^{0.582} \cdot 10^{1410}$ であるから, $10^{0.582}$ の値を考える。ここで,

$$\begin{aligned}\log_{10} 3 &= 0.4771 \\ \Leftrightarrow 3 &= 10^{0.4771}\end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned}4 &= 2^2 \\ &= (10^{0.3010})^2 \\ &= 10^{0.6020}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}10^{0.4771} &< 10^{0.582} < 10^{0.6020} \\ \Leftrightarrow 3 &< 10^{0.582} < 4\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}3 \cdot 10^{1410} &< 10^{0.582} \cdot 10^{1410} < 4 \cdot 10^{1410} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 10^{1410} &< 5^{2018} < 4 \cdot 10^{1410}\end{aligned}$$

であるから, 5^{2018} の最高位の数字は 3 である。

(答) 3

(3)

$5^n > 2^{30}$ の両辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10} 5^n &> \log_{10} 2^{30} \\ \Leftrightarrow 0.6990n &> 30 \cdot 0.3010 \\ \therefore n &> \frac{9.030}{0.6990}\end{aligned}$$

となる。ここで, $12.91 < \frac{9.030}{0.6990} < 12.92$ である。したがって, 求める最小の自然数 n は 13 である。

(答) 13

(3)[別解]

$5^n = (10^{0.6990})^n = 10^{0.6990n}$, $2^{30} = (10^{0.3010})^{30} = 10^{9.03}$ であるから,

$$\begin{aligned}5^n &> 2^{30} \\ \Leftrightarrow 10^{0.6990n} &> 10^{9.030} \\ \Leftrightarrow 0.6990n &> 9.030 \\ \therefore n &> \frac{9.030}{0.6990}\end{aligned}$$

である。ここで, $12.91 < \frac{9.030}{0.6990} < 12.92$ である。したがって, 求める最小の自然数 n は 13 である。

(答) 13

(1)

Oを原点とすると、

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\ &= (4, 3, -1) - (-2, 1, 3) \\ &= (6, 2, -4)\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{6^2 + 2^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{56} \\ &= 2\sqrt{14}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \overline{AB} = (6, 2, -4), |\overline{AB}| = 2\sqrt{14}$$

(2)

$\vec{x} = (1, -1, 1)$ とすると、

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \vec{x} &= 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

であるから、 $\overline{AB}$ と $\vec{x}$ は垂直である。したがって、 $\overline{AB}$ と垂直で大きさが1のベクトルの1つは、

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{x}|} \vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \vec{x} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

(2)[別解]

実数 a, b, c を用いて、求めるベクトルを $\vec{x} = (a, b, c)$ とおく。(ただし、 $\vec{x}$ は零ベクトルでないとする。)このとき、

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\perp \vec{x} \\ \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \vec{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow 6a + 2b - 4c &= 0 \quad \cdot \cdot \cdot \text{①}\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}|\vec{x}| &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \quad \cdot \cdot \cdot \text{②}\end{aligned}$$

である。 $c = 0$ とおくと、①より $b = -3a$ であり、②に代入して、

$$a^2 + (-3a)^2 + 0 = 1 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

となる。したがって、求めるベクトルの1つは $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0 \right)$ である。

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0 \right)$$

(3)

求める点は x 軸上の点であるから、実数 t を用いて、 $D(t, 0, 0)$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}AD^2 &= (t+2)^2 + (0-1)^2 + (0-3)^2 \\ &= t^2 + 4t + 14\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}BD^2 &= (t-4)^2 + (0-3)^2 + (0+1)^2 \\ &= t^2 - 8t + 26\end{aligned}$$

である。したがって、 $AD = BD$ のとき、

$$\begin{aligned}AD &= BD \\ \Leftrightarrow AD^2 &= BD^2 \\ \Leftrightarrow t^2 + 4t + 14 &= t^2 - 8t + 26 \\ \Leftrightarrow 12t &= 12 \\ \therefore t &= 1\end{aligned}$$

であるから、求める点の座標は $(1, 0, 0)$ である。

$$\text{(答)} \quad (1, 0, 0)$$

(4)

点Cは xy 平面上の点であるから、その座標を $(X, Y, 0)$ とする。

$\triangle ABC$ が正三角形となるのは、 $AB = BC = CA$ 、すなわち、 $AB = BC$ かつ $AB = CA$ となるときである。

$$\begin{aligned}AB &= BC \\ \Leftrightarrow AB^2 &= BC^2 \\ \Leftrightarrow (X-4)^2 + (Y-3)^2 + (0+1)^2 &= 56 \quad \cdot \cdot \cdot \text{①}\end{aligned}$$

$$\therefore X^2 - 8X + Y^2 - 6Y = 30 \quad \cdot \cdot \cdot \text{②}$$

であり、

$$\begin{aligned}AB &= CA \\ \Leftrightarrow AB^2 &= CA^2 \\ \Leftrightarrow (X+2)^2 + (Y-1)^2 + (0-3)^2 &= 56 \\ \therefore X^2 + 4X + Y^2 - 2Y &= 42 \quad \cdot \cdot \cdot \text{③}\end{aligned}$$

である。③-②より、

$$\begin{aligned}12X + 4Y &= 12 \\ \Leftrightarrow Y &= -3X + 3\end{aligned}$$

であり、これを①に代入すると、

$$\begin{aligned}(X-4)^2 + (-3X+3-3)^2 + 1 &= 56 \\ \Leftrightarrow 10X^2 - 8X - 39 &= 0\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}X &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 10 \cdot (-39)}}{10} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{406}}{10}\end{aligned}$$

である。これを $Y = -3X + 3$ に代入して、

$$\begin{aligned}Y &= -3X + 3 \\ &= \frac{-12 \mp 3\sqrt{406}}{10} + 3 \\ &= \frac{18 \mp 3\sqrt{406}}{10}\end{aligned}$$

である。ただし複号同順である。以上より、点Cの座標は、

$$\left(\frac{4+\sqrt{406}}{10}, \frac{18-3\sqrt{406}}{10}, 0 \right), \left(\frac{4-\sqrt{406}}{10}, \frac{18+3\sqrt{406}}{10}, 0 \right) \text{となる。}$$

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{4+\sqrt{406}}{10}, \frac{18-3\sqrt{406}}{10}, 0 \right), \left(\frac{4-\sqrt{406}}{10}, \frac{18+3\sqrt{406}}{10}, 0 \right)$$

4

(1)

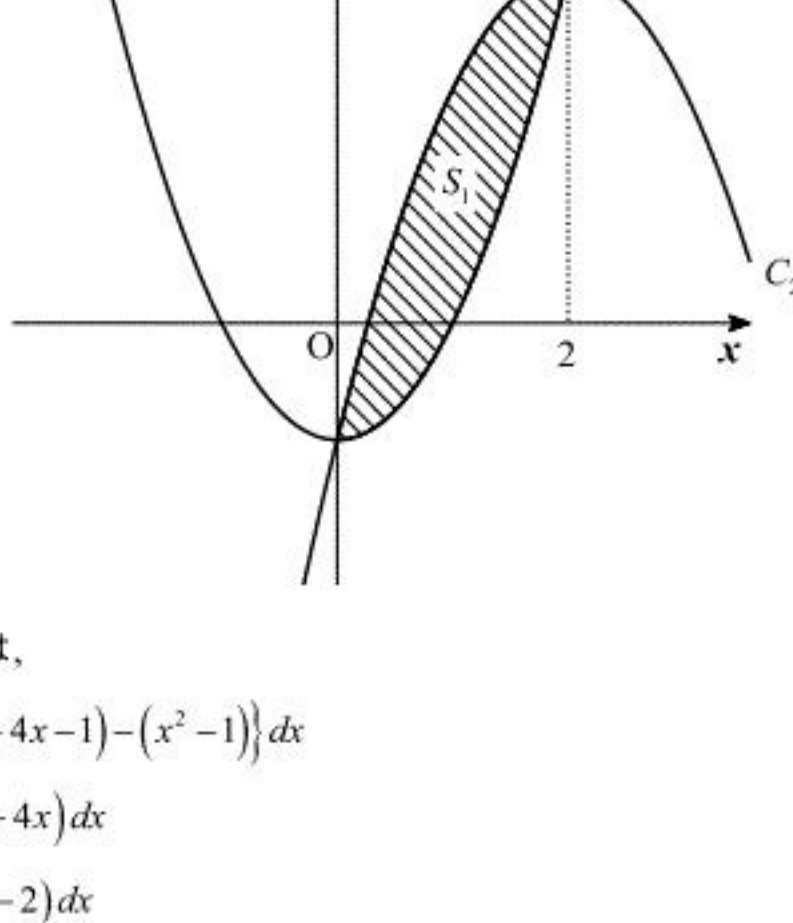
C_2 の方程式は、

$$\begin{aligned} y-3 &= -(x-2)^2 \\ \Leftrightarrow y &= -x^2+4x-1 \end{aligned}$$

であるから、これと C_1 との共有点の x 座標について、2 つの方程式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2-1 &= -x^2+4x-1 \\ \Leftrightarrow 2x^2-4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 C_1 と C_2 で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



よって、その面積 S_1 は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^2 \{(-x^2+4x-1) - (x^2-1)\} dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2+4x) dx \\ &= -2 \int_0^2 x(x-2) dx \\ &= -2 \cdot \left\{ -\frac{1}{6} \cdot (2-0)^3 \right\} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}$

(2)

$y=x^2-1$ について、 x で微分すると $y'=2x$ である。よって、 C_1 上の点 $(1, 0)$ における接線 l_1 の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot 1 \cdot (x-1) \\ \Leftrightarrow y &= 2x-2 \end{aligned}$$

である。

(答) $y=2x-2$

(3)

l_1 と C_2 の交点の x 座標について、2 つの方程式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned} -x^2+4x-1 &= 2x-2 \\ \Leftrightarrow x^2-2x-1 &= 0 \end{aligned}$$

であるから、この方程式の解が l_1 と C_2 の交点の x 座標となる。ここで、この方程式の2解を α, β (α, β は実数、 $\alpha \leq \beta$) とすると、解と係数の関係から、

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

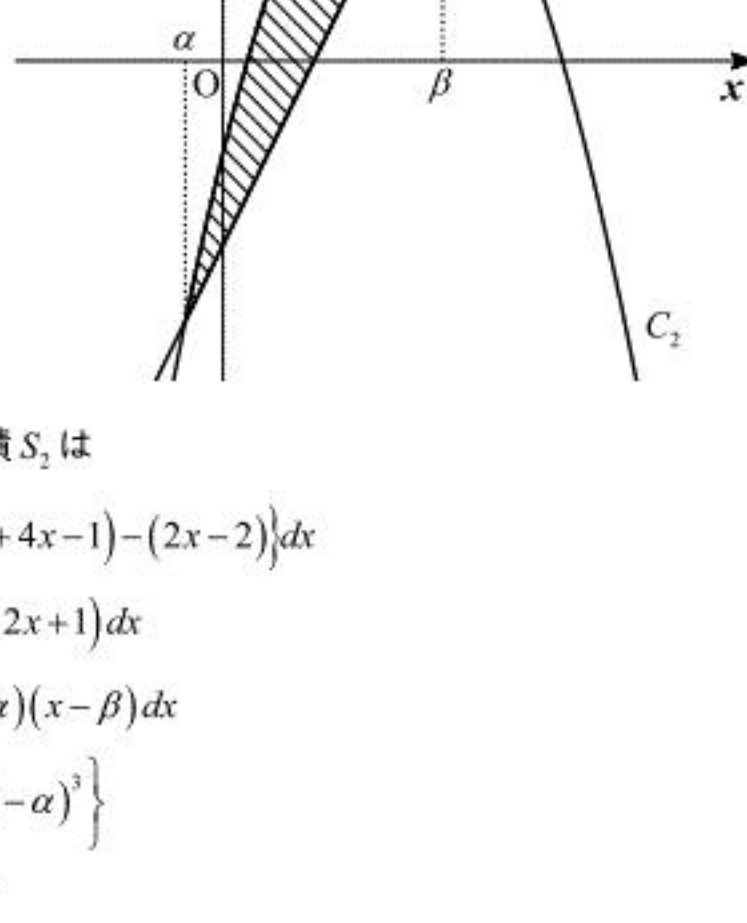
である。したがって、

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 2^2 - 4 \cdot (-1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

となり、 $\beta-\alpha \geq 0$ より、

$$\beta-\alpha = 2\sqrt{2}$$

である。また、 l_1 と C_2 で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



したがって、その面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2+4x-1) - (2x-2)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2+2x+1) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= -\left\{ -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(3)[別解]

l_1 と C_2 の交点の x 座標について、2 つの方程式を連立して y を消去すると、

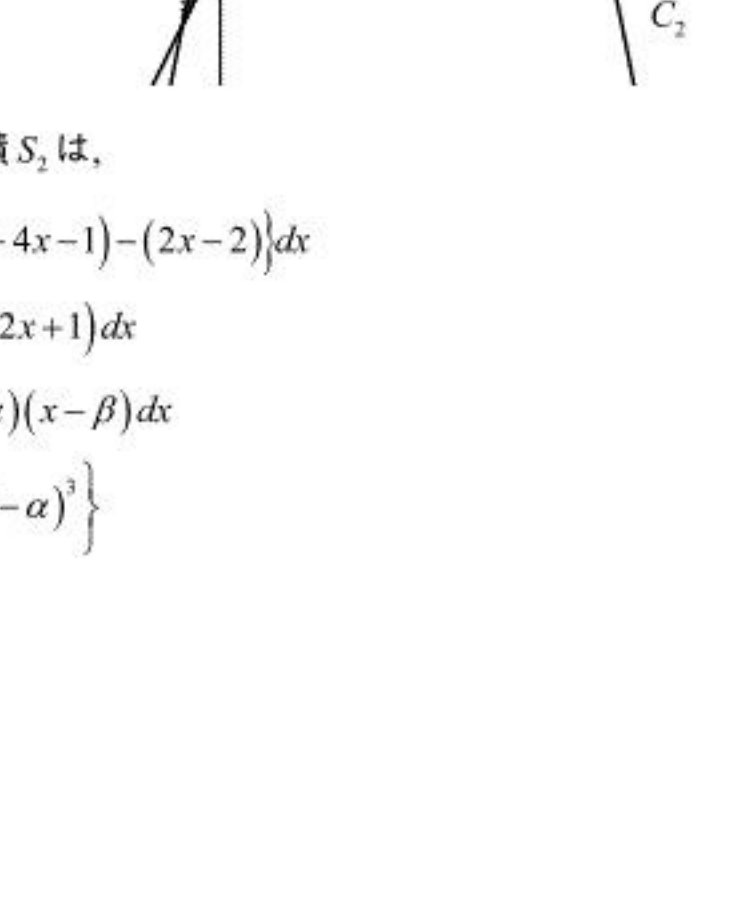
$$\begin{aligned} -x^2+4x-1 &= 2x-2 \\ \Leftrightarrow x^2-2x-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

となる。ここで、 $\alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$ とおくと、

$$\beta - \alpha = 2\sqrt{2}$$

となる。また、 l_1 と C_2 で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



したがって、その面積 S_2 は、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2+4x-1) - (2x-2)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2+2x+1) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= -\left\{ -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(4)

c を定数として l_2 の方程式を $y=2x+c$ とおく。このとき、 l_2 は C_1 と2つの異なる共有点を持ち、 C_1 は下に凸な放物線であるから、 l_2 は C_1 に接する傾き2の直線である l_1 よりも y 軸に関して正の位置にある。したがって、 $c > -2$ である。 l_2 と C_1 の2つの異なる共有点の x 座標について、2 つの方程式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2-1 &= 2x+c \\ \Leftrightarrow x^2-2x-(c+1) &= 0 \end{aligned}$$

であるから、この方程式の解が l_2 と C_1 の2つの異なる共有点の x 座標となる。ここで、この方程式の2解を p, q ($p < q$) とすると、解と係数の関係から、

$$p+q=2, pq=-c-1$$

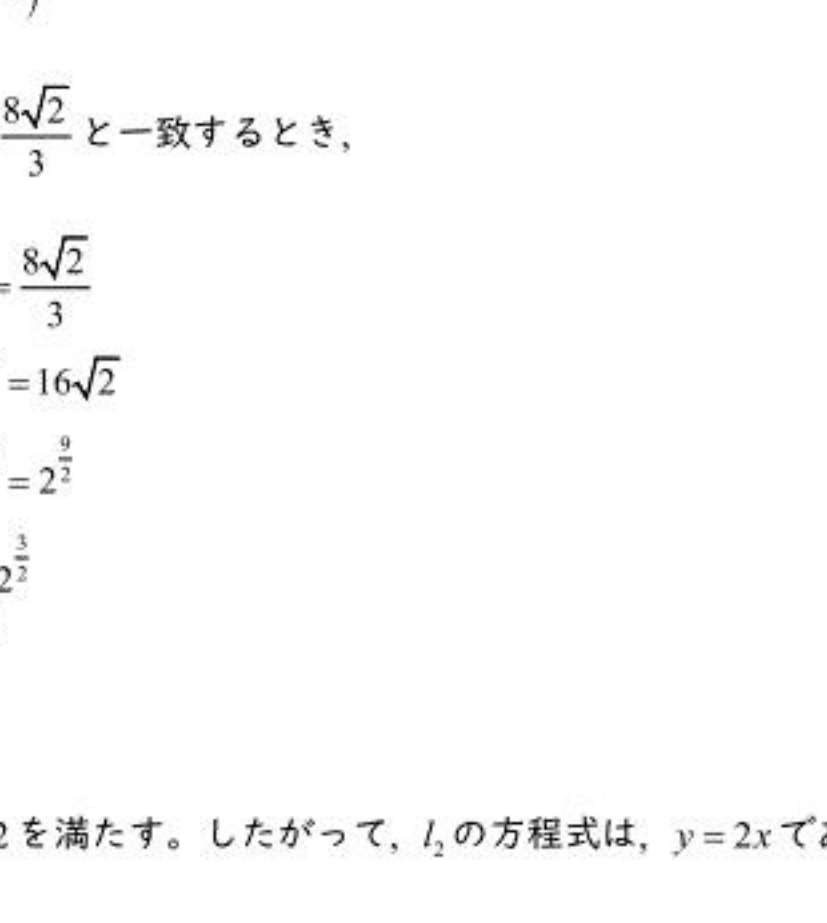
である。したがって、

$$\begin{aligned} (q-p)^2 &= (p+q)^2 - 4pq \\ &= 2^2 - 4(-c-1) \\ &= 4c+8 \end{aligned}$$

であり、 $q-p > 0$ および $c > -2$ より、

$$q-p = \sqrt{4c+8}$$

である。また、 l_2 と C_1 で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



したがって、その面積 S_3 は、

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_p^q \{(2x+c) - (x^2-1)\} dx \\ &= -\int_p^q \{x^2-2x-(c+1)\} dx \\ &= -\int_p^q (x-p)(x-q) dx \\ &= -\left\{ -\frac{1}{6}(q-p)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{4c+8})^3 \end{aligned}$$

である。これが $S_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ と一致するとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(\sqrt{4c+8})^3 &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4c+8})^3 &= 16\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4c+8})^3 &= 2^{\frac{9}{2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4c+8} &= 2^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow 4c+8 &= 2^3 \\ \Leftrightarrow 4c+8 &= 8 \\ \therefore c &= 0 \end{aligned}$$

であり、これは $c > -2$ を満たす。したがって、 l_2 の方程式は、 $y=2x$ である。

(答) $y=2x$

(4)[別解]

C_1 と C_2 の2次の係数は互いに -1 倍した関係である。また、それぞれの方程式は

$$\begin{aligned} y &= x^2-1 \\ y &= -x^2+4x-1 \Leftrightarrow y = -(x-2)^2+3 \end{aligned}$$

であるから、頂点はそれぞれ $(0, -1), (2, 3)$ である。したがって、 C_1 と C_2 はそれらの頂点の中点である点 $(1, 1)$ に関して点対称である。このとき、 C_1 と C_2 および l_1 と l_2 を図示すると下図のようになる。

$S_2 = S_3$ となるのは、 l_1 と l_2 も点 $(1, 1)$ に関して点対称である場合である。 l_1 は C_1 と点 $(1, 0)$ で接する接線であるから、そのような条件をみたすのは l_2 が C_2 と、点 $(1, 0)$ の点 $(1, 1)$ に関して対称である点 $(1, 2)$ で接する場合である。したがって、 l_2 の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1)-2 \\ \Leftrightarrow y &= 2x \end{aligned}$$

である。

(答) $y=2x$