

(1)

以下(1), (2)では7を法として考える。 x が7で割ると3余るような整数のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x + 105 \\ &\equiv 3^2 + 3 \\ &\equiv 5 \end{aligned}$$

となる。よって $f(x)$ を7で割った余りは5である。

(証明終)

(2)

$a_1 = 52 \equiv 3$ であるから, (1)より, $a_2 \equiv 5$ である。さらに同様にして,

$$\begin{aligned} a_3 &\equiv 5^2 + 5 + 105 \equiv 2 \\ a_4 &\equiv 2^2 + 2 + 105 \equiv 6 \\ a_5 &\equiv 6^2 + 6 + 105 \equiv 0 \end{aligned}$$

である。以下, 数学的帰納法を利用して, $n > 4$ で a_n が7の倍数であることを示す。

[1] $n = 5$ のとき

上記から $a_5 \equiv 0$ である。

[2] $n = k$ のとき

このとき a_n が7の倍数であると仮定すると

$$a_{k+1} \equiv a_k^2 + a_k + 105 \equiv 0$$

である。すなわち, $n = k + 1$ でも a_n が7の倍数であることが示された。

以上, [1], [2]より, $n > 4$ で a_n は7の倍数である。

(証明終)

(3)

数学的帰納法を利用して, 任意の自然数 n において, a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1, n が奇数のとき2であることを示す。

[1] $n = 1, 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= 52 \equiv 2 \pmod{5} \\ a_2 &\equiv 2^2 + 2 + 105 \equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

であるから, $n = 1, 2$ で成り立つ。

[2] $n = 2k - 1$ (k は自然数) のとき

このとき, $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ であると仮定する。 a_{2k} は,

$$\begin{aligned} a_{2k} &\equiv a_{2k-1}^2 + a_{2k-1} + 105 \\ &\equiv 2^2 + 2 + 105 \\ &\equiv 4 + 2 + 0 \\ &\equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

であり, a_{2k+1} は,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &\equiv a_{2k}^2 + a_{2k} + 105 \\ &\equiv 1^2 + 1 + 105 \\ &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

であるから, $n = 2k$ のとき, $a_n \equiv 1 \pmod{5}$, $n = 2k + 1$ のとき, $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ が成り立つ。

以上, [1], [2]より, 任意の自然数 n において, a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1, n が奇数のとき2であることが示された。よって, $n > 4$ のとき, a_n を5で割った余りは n が偶数のとき1, n が奇数のとき2であることが示された。

(答) n が偶数のとき1, n が奇数のとき2

(4)

以下3を法として考えると, $a_1 = 52 \equiv 1$ であるから,

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 1^2 + 1 + 105 \equiv 2 \\ a_3 &\equiv 2^2 + 2 + 105 \equiv 0 \end{aligned}$$

とわかる。また, $a_n \equiv 0$ のとき $a_{n+1} \equiv 0$ であるから, 上記同様に $n > 3$ で a_n は3の倍数である。

このことと(2), (3)より, $n > 4$ において3と7の倍数であり, 5の倍数ではない。一方,

$a_{n+1} = a_n(a_n + 1) + 105$ であるから, ユークリッドの互除法より, a_n と a_{n+1} の最大公約数は a_n と105の最大公約数に等しい。よって, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ であることを考慮して, a_n と a_{n+1} の最大公約数は $3 \cdot 7 = 21$ である。

(証明終)

(1)

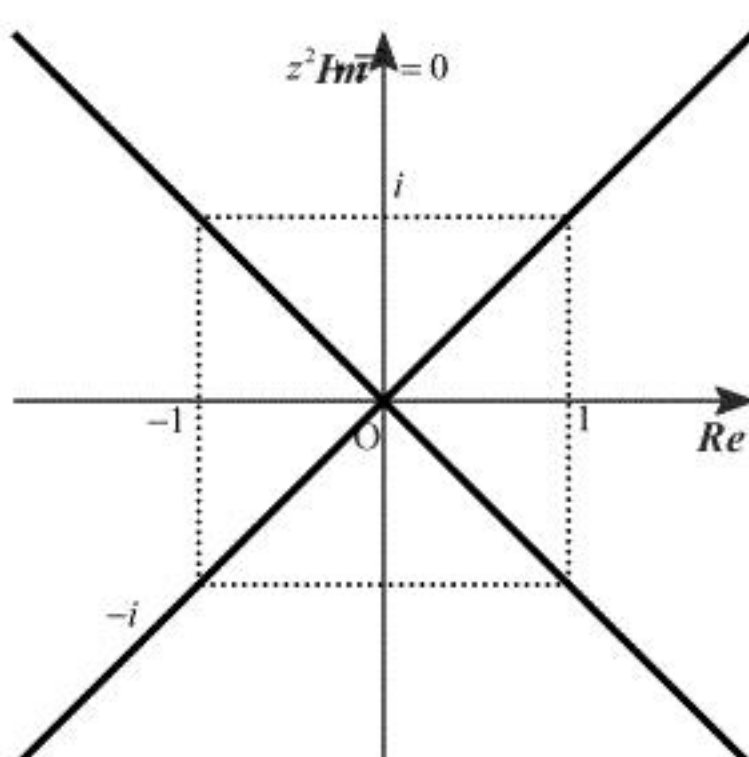
実数 x, y を用いて $z = x + yi$ とおくと、

$$z^2 + \bar{z}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^2 + (x - yi)^2 = 0$$

$$\therefore 2(x + y)(x - y) = 0$$

となる。これは複素数平面上において、 $y = x$ および $y = -x$ を表す。したがって、求める図形は下図の実線である。



(答) 前図

(2)

$$\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$$

$$\alpha^2 = |\alpha|^2 \{ \cos(2 \arg \alpha) + i \sin(2 \arg \alpha) \}$$

である。よって、 $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \alpha^2$ であるとき、自然数 n を用いて、

$$|\alpha| = 1$$

$$\arg \alpha = \frac{2}{3}\pi + n\pi$$

である。したがって、題意をみたす複素数は $\alpha = \frac{\pm 1 \mp \sqrt{3}i}{2}$ (複号同順) である。

(答) $\alpha = \frac{\pm 1 \mp \sqrt{3}i}{2}$ (複号同順)

(3)

(2)より、与式を変形すると、

$$(-1 - \sqrt{3}i)z^2 + (-1 + \sqrt{3}i)\bar{z}^2 = 0$$

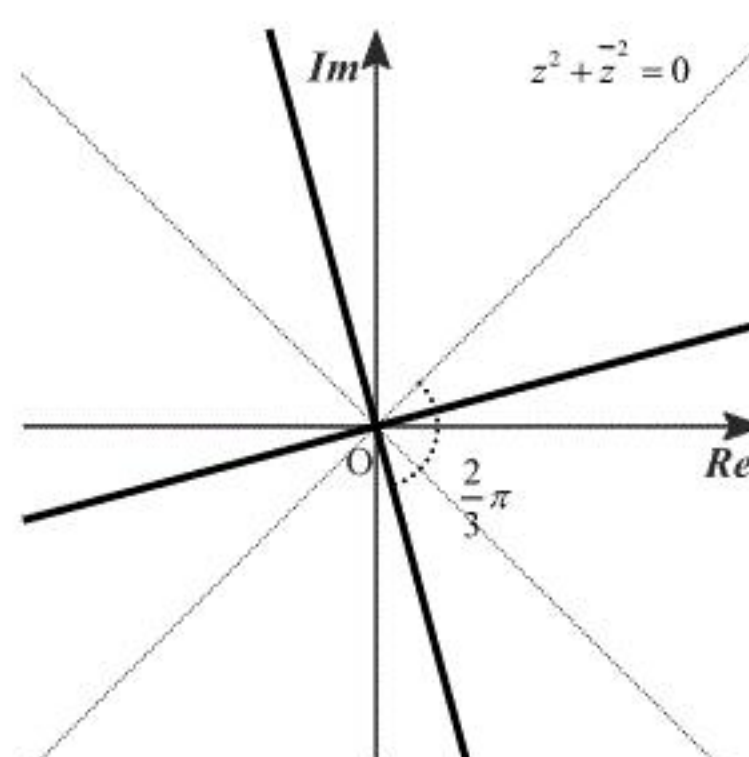
$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 z^2 + 2\overline{\alpha^2 z^2} = 0$$

$$\therefore (\alpha z)^2 + \overline{(\alpha z)^2} = 0$$

となる。ここで、 $\omega = \alpha z$ とおくと、 $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = 0$ であるから、 ω の集合は複素数平面上で(1)で求めた図形を描く。また、 $|\alpha| = 1$ に注意すると、

$$z = \frac{\omega}{\alpha} = \omega \bar{\alpha}$$

と変形できる。よって、複素数 z の表す点は複素数 ω が表す点を原点を中心に $-\arg \alpha$ だけ回転したものであるから、求める図形は(1)の図形を原点を中心に $-\arg \alpha$ だけ回転したものとわかる。したがって、求める図形は下図の実線である。



(答) 前図

(4)

題意より、条件を満たす複素数 z の表す点は(3)で求めた図形上の点であり、かつ原点からの距離が1であり、第2象限にある点である。したがって、(3)の図から条件を満たす複素数 z は

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ を原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものに等しい。よって、

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i$$

となる。

(答) $z = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i$

(1)

導関数と微分係数の定義から、 $f(x)=f(-x)$ と $h \rightarrow 0$ のとき $-h \rightarrow 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} -f'(-x) &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h)-f(h)}{h} \\ &= \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(-h)}{-h} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$f(x)$ は多項式であり、 $f(x)=f(-x)$ をみたすことから偶関数である。さらに、 $f(0)=0$ をみたすことから定数項は0である。以上より、自然数 n と実数 a_k ($k=1, 2, \dots, n$)を用いて、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_n x^{2n} \\ &= x^2 (a_1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{2n-2}) \end{aligned}$$

と表すことができる。また、 $f(1)=1$ 、つまり $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ となる実数 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の組は存在する。よって、 $f(x)$ は x^2 で割り切れる。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t) dt &= f(x) - 1 \\ \Leftrightarrow [f(t)]_a^x &= f(x) - 1 \\ \Leftrightarrow f(a) &= 1 \end{aligned}$$

である。一方、題意より、 $f(1)=1$ かつ $f(x)=f(-x)$ であるから、 $f(1)=f(-1)=1$ である。よって、求める a の値は $a=\pm 1$ である。

(答) $a=\pm 1$

(4)

$f(x)$ は6次式であるから、(2)より、 $f(x)=a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6$ とおくことができる。ただし $a_3 \neq 0$ である。このとき、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 x^2 dx \\ \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx &= 2 \int_0^1 x^2 dx \\ \Leftrightarrow \left[\frac{a_1}{3} x^3 + \frac{a_2}{5} x^5 + \frac{a_3}{7} x^7 \right]_0^1 &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ \therefore \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{7} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。また、

$$f(1)=1 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

である。2式より、

$$a_2 = -\frac{10}{7} a_3, a_1 = \frac{3}{7} a_3 + 1$$

である。よって、 $f(x)$ は0でない任意の実数 a_3 を用いて、 $f(x)=a_3 x^6 - \frac{10}{7} a_3 x^4 + \left(1 + \frac{3}{7} a_3\right) x^2$ と求められる。

(答) $f(x)=a_3 x^6 - \frac{10}{7} a_3 x^4 + \left(1 + \frac{3}{7} a_3\right) x^2$ (a_3 は0でない任意の実数)

(1)

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす θ を用いて $x = \tan \theta$ と置換すると $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり

x	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \frac{dx}{d\theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\frac{\pi}{6}$

(2)

問題文より

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= 1 + \sum_{k=1}^n (-x^2)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n (-x^2)^k \\
 &= \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}
 \end{aligned}$$

と計算でき、 $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ であることから

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| = \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leq x^{2(n+1)}$$

とわかる。

(証明終)

(3)

(2) の結果と積分の単調性から

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left| S_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| dx \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{2(n+1)} dx$$

である。また

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^{2(n+1)} dx &= \left[\frac{1}{2n+3} x^{2n+3} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{1}{3\sqrt{3}(2n+3)} 3^{-n} \\
 &< 3^{-n}
 \end{aligned}$$

であり

$$\left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} S_n(x) dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left\{ S_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right\} dx \right| \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left| S_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| dx$$

を考慮すると

$$\left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} S_n(x) dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq 3^{-n}$$

とわかる。

(証明終)

(4)

(1) の経過から

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} S_n(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sum_{k=0}^n (-x^2)^k dx \\
 &= \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}
 \end{aligned}$$

となる。これと (1), (3) の結果を用いると

$$\left| \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} - \frac{\pi}{6} \right| \leq 3^{-n}$$

とわかる。また $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} = 0$ であるからはさみうちの原理より

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} - \frac{\pi}{6} \right\} &= 0 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} &= \frac{\sqrt{3}\pi}{6}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$