

1

(1)

$3x^2 + \sqrt{6}x + k = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (\sqrt{6})^2 - 4 \cdot 3 \cdot k \\ &= 6 - 12k \end{aligned}$$

であるから、実数解を持つ条件は、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 6 - 12k &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $k \leq \frac{1}{2}$

(2)

$3x^2 + \sqrt{6}x + k = 0$ の 2 つの解が $2\cos\theta + \sin\theta, \cos\theta + 2\sin\theta$ であるとき、解と係数の関係より、2 つの解の和について、

$$(2\cos\theta + \sin\theta) + (\cos\theta + 2\sin\theta) = -\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、2 つの解の積について、

$$(2\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta + 2\sin\theta) = \frac{k}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} (2\cos\theta + \sin\theta) + (\cos\theta + 2\sin\theta) &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \Leftrightarrow 3(\cos\theta + \sin\theta) &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \Leftrightarrow \cos\theta + \sin\theta &= -\frac{\sqrt{6}}{9} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であり、両辺を二乗すると、

$$\begin{aligned} (\cos\theta + \sin\theta)^2 &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta &= \frac{2}{27} \\ \Leftrightarrow 1 + 2\cos\theta\sin\theta &= \frac{2}{27} \\ \therefore \cos\theta\sin\theta &= -\frac{25}{54} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{25}{54}$

(3)

$\textcircled{2}$ と $\cos\theta\sin\theta = -\frac{25}{54}$ より、

$$\begin{aligned} (2\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta + 2\sin\theta) &= \frac{k}{3} \\ \Leftrightarrow 2\cos^2\theta + 5\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta &= \frac{k}{3} \\ \Leftrightarrow 2 + 5 \cdot \left(-\frac{25}{54}\right) &= \frac{k}{3} \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{17}{18} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{17}{18}$

(4)

$\cos\theta\sin\theta = -\frac{25}{54}$ より、

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2\cos\theta\sin\theta \\ &= -\frac{25}{27} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos^2 2\theta &= 1 - \sin^2 2\theta \\ &= 1 - \left(-\frac{25}{27}\right)^2 \\ &= \frac{104}{729} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{3}$ より、 $\cos\theta + \sin\theta < 0$ であるから、

$$\sin\theta < -\cos\theta$$

である。さらに、 $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから、

$$\frac{3}{4}\pi < \theta \leq \pi$$

となる。よって、

$$\frac{3}{2}\pi < 2\theta \leq 2\pi$$

であるから、

$$\cos 2\theta > 0$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \sqrt{\frac{104}{729}} \\ &= \frac{2\sqrt{26}}{27} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2\sqrt{26}}{27}$

(1)

関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ について、

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q$$

である。ここで、曲線 $C: y = f(x)$ が点 $(2, 0)$ で x 軸に接しているから、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2^3 + p \cdot 2^2 + q \cdot 2 = 0 \\ 3 \cdot 2^2 + 2p \cdot 2 + q = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 4p + 2q = 0 \\ 12 + 4p + q = 0 \end{cases} \\ & \therefore p = -4, q = 4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $p = -4, q = 4$

(2)

(1)より、

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

であるから、

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow (3x - 2)(x - 2) = 0 \\ & \therefore x = \frac{2}{3}, 2 \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	$\frac{2}{3}$	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ の極大値は、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{32}{27} \end{aligned}$$

である。

(答) $x = \frac{2}{3}$ で極大値 $\frac{32}{27}$

(3)

曲線 C と直線 l の接点のうち、点 $(2, 0)$ でない点の座標を、実数 t ($t \neq 2$) を用いて $(t, f(t))$ とすると、直線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x - t) + f(t) \\ &= (3t^2 - 8t + 4)(x - t) + t^3 - 4t^2 + 4t \end{aligned}$$

である。直線 l は点 $(2, 0)$ を通るから、

$$\begin{aligned} 0 &= (3t^2 - 8t + 4)(2 - t) + t^3 - 4t^2 + 4t \\ &\Leftrightarrow -(3t - 2)(t - 2)^2 + t(t - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(t - 1)(t - 2)^2 = 0 \\ &\therefore t = 1 \quad (\because t \neq 2) \end{aligned}$$

となる。 $t = 1$ のとき、直線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 4)(x - 1) + 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow y = -x + 2 \end{aligned}$$

となり、確かに傾きは負である。このとき、

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 4x &= -x + 2 \\ &\Leftrightarrow (x^3 - 4x^2 + 4x) - (-x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 2) = 0 \end{aligned}$$

より、曲線 C と直線 l は、 $x = 1, 2$ においてのみ共有点を持つ。また、

$$(x^3 - 4x^2 + 4x) - (-x + 2) = (x - 1)^2(x - 2)$$

であり、 $1 \leq x \leq 2$ において、

$$(x - 1)^2(x - 2) \leq 0$$

であるから、 $1 \leq x \leq 2$ において、

$$x^3 - 4x^2 + 4x \leq -x + 2$$

である。以上より、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_1^2 \{(-x + 2) - (x^3 - 4x^2 + 4x)\} dx &= \int_1^2 (-x^3 + 4x^2 - 5x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{12}$

(1)

点 P が平面 ABC 上にあるとき、実数 α, β を用いて、

$$\overrightarrow{CP} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$$

と表せる。これを变形すると、

$$\overrightarrow{CP} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \vec{c} = \alpha (\vec{a} - \vec{c}) + \beta (\vec{b} - \vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + (1 - \alpha - \beta) \vec{c}$$

となる。ここで、実数 s, t, u について、 $s = \alpha, t = \beta, u = 1 - \alpha - \beta$ とすると、 $s + t + u = 1$ であり、

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

点 D は辺 OA を 2:3 に、点 E は辺 BC を 4:1 に内分するから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{5} \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{5} \vec{b} + \frac{4}{5} \vec{c}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \vec{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \vec{b} + \frac{4}{5} \vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{5} \vec{a} + \frac{1}{10} \vec{b} + \frac{2}{5} \vec{c} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{5} \vec{a} + \frac{1}{10} \vec{b} + \frac{2}{5} \vec{c}$$

(3)

点 Q は直線 OM 上にあるから、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= k \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{k}{5} \vec{a} + \frac{k}{10} \vec{b} + \frac{2}{5} k \vec{c} \end{aligned}$$

と表せる。(1)より、

$$\begin{aligned} \frac{k}{5} + \frac{k}{10} + \frac{2}{5} k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \frac{10}{7} \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{7} \vec{a} + \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{7} \vec{b} + \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{7} \vec{c} \\ &= \frac{2}{7} \vec{a} + \frac{1}{7} \vec{b} + \frac{4}{7} \vec{c} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{7} \vec{a} + \frac{1}{7} \vec{b} + \frac{4}{7} \vec{c}$$

(4)

(3)より、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{10}{7} \overrightarrow{OM}$ であるから、

$$OM : MQ = 7 : 3$$

である。

(答) 7:3

(1)

円 $x^2 + y^2 = 10$ を円 C_1 とする。点 $A(2, 4)$ から円 C_1 に引いた接線について、接点を $A'(a, b)$ とすると、点 $A'(a, b)$ は円 C_1 上の点であるから、 $a^2 + b^2 = 10$ が成立する。また、直線 AA' は円 C_1 に接するから、直線 AA' と直線 OA' は垂直であり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{AA'} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a, b) \cdot (a-2, b-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a + b^2 - 4b &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a + 4b = 10 \quad (\because a^2 + b^2 = 10) \\ \therefore a + 2b &= 5\end{aligned}$$

となる。 $a^2 + b^2 = 10$ に $a = 5 - 2b$ を代入して、

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow (5 - 2b)^2 + b^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow 5b^2 - 20b + 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b-1)(b-3) &= 0 \\ \therefore b &= 1, 3\end{aligned}$$

である。以上より、 $(a, b) = (3, 1), (-1, 3)$ である。 $-1 < 3$ より、 $S(-1, 3), T(3, 1)$ となる。

(答) $S(-1, 3), T(3, 1)$

(2)

$f(x)$ は 2 次関数であるから、実数 p, q, r ($p \neq 0$) を用いて、

$$f(x) = px^2 + qx + r$$

と表せる。 $y = f(x)$ のグラフが点 $(2, 4), (-1, 3), (3, 1)$ を通るから、

$$\begin{cases} 4 = p \cdot 2^2 + q \cdot 2 + r \\ 3 = p \cdot (-1)^2 + q \cdot (-1) + r \\ 1 = p \cdot 3^2 + q \cdot 3 + r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4p + 2q + r \\ 3 = p - q + r \\ 1 = 9p + 3q + r \end{cases}$$

$$\therefore (p, q, r) = \left(-\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, 5\right)$$

となる。よって、

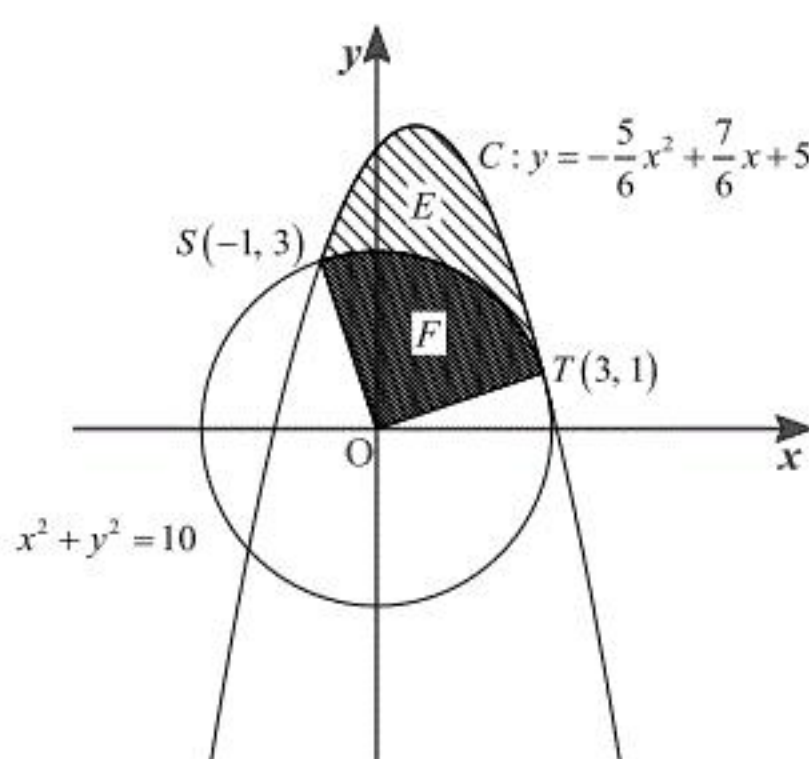
$$f(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 5$$

である。

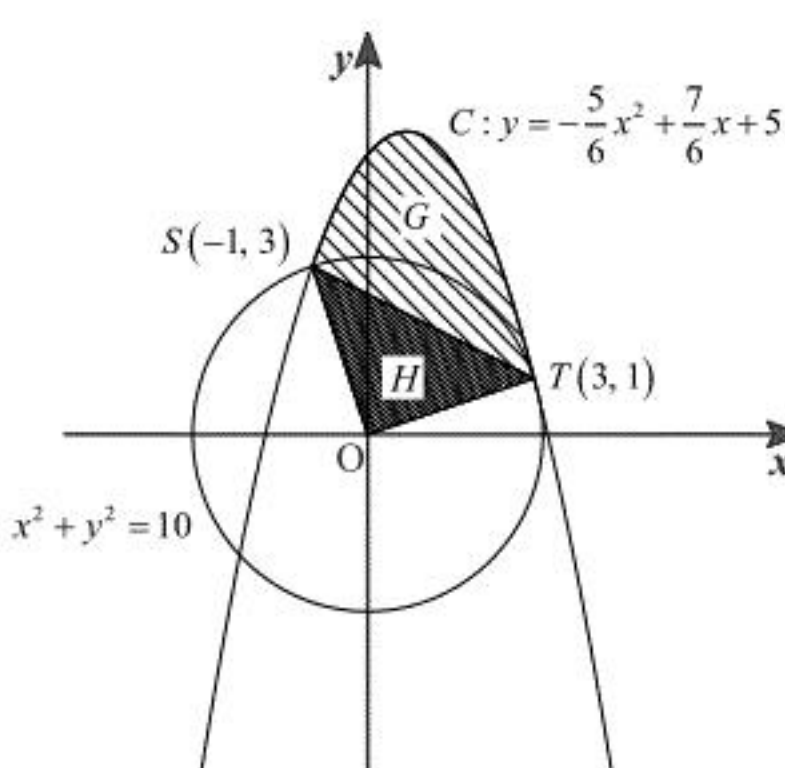
(答) $f(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 5$

(3)

曲線 C および円 $x^2 + y^2 = 10$ は下図の通りである。面積を求める部分は下図の斜線部であり、面積を E とする。また、線分 OS, OT および弧 ST で囲まれる扇形(打点部)の面積を F とする。



また、下図の通り、曲線 C と線分 ST で囲まれた部分(斜線部)の面積を G 、三角形 OTS (打点部)の面積を H とする。



以上の通り E, F, G, H について定めると、求める面積 E について、

$$\begin{aligned}E + F &= G + H \\ \Leftrightarrow E &= G + H - F\end{aligned}$$

が成立する。まず、直線 OS, OT の方程式はそれぞれ $y = -3x, y = \frac{1}{3}x$ であり、両直線の傾きの

積が -1 であるから、 $\angle SOT = \frac{\pi}{2}$ である。よって、線分 OS, OT および弧 ST で囲まれる扇形の

面積 F は

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (\sqrt{10})^2 \\ &= \frac{5}{2}\pi\end{aligned}$$

である。また、三角形 OTS の面積 H は

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 5\end{aligned}$$

である。次に、直線 ST の方程式は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ であるから、曲線 C と線分 ST で囲まれた部分の面積 G は、

$$\begin{aligned}G &= \int_{-1}^3 \left\{ \left(-\frac{5}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 5 \right) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-1}^3 \left[-\frac{5}{6}(x-3) \{x - (-1)\} \right] dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[-\frac{5}{6} \right] \cdot \{3 - (-1)\}^3 \\ &= \frac{80}{9}\end{aligned}$$

である。以上より、求める面積は、

$$\begin{aligned}E &= G + H - F \\ &= \frac{80}{9} + 5 - \frac{5}{2}\pi \\ &= \frac{125}{9} - \frac{5}{2}\pi\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{125}{9} - \frac{5}{2}\pi$