

(1)

$$x^2+y^2-5-c(xy-2)=0$$

より、これがどのような実数 c に対しても成立するためには、 $x^2+y^2-5=0$ かつ $xy-2=0$ が条件である。このとき、 $x^2+y^2=5$ かつ $xy=2$ であるから、

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2xy &= 5+2\cdot 2 \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 &= 9 \\ \therefore x+y &= \pm 3 \end{aligned}$$

となる。

[1] $x+y=3$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 3-x \text{ より,} \\ x(3-x) &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2-3x+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 2 \end{aligned}$$

であるから、 $(x, y)=(1, 2), (2, 1)$ を得る。

[2] $x+y=-3$ のとき

$$\begin{aligned} y &= -3-x \text{ より,} \\ x(-3-x) &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2+3x+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= -1, -2 \end{aligned}$$

であるから、 $(x, y)=(-1, -2), (-2, -1)$ を得る。

以上[1], [2]より、 $(x, y)=(-2, -1), (-1, -2), (1, 2), (2, 1)$ である。

(答) $(x, y)=(-2, -1), (-1, -2), (1, 2), (2, 1)$

(2)

$c=2$ のとき、

$$\begin{aligned} x^2+y^2-5-c(xy-2) &= x^2+y^2-2xy-1 \\ &= (x-y)^2-1 \\ &= (x-y+1)(x-y-1) \end{aligned}$$

である。

(答) $(x-y+1)(x-y-1)$

(3)

背理法によって $x^2+y^2-5=(px+qy+r)(sx+ty+u)$ をみたす実数 p, q, r, s, t, u が存在しないことを示す。すなわち、 $x^2+y^2-5=(px+qy+r)(sx+ty+u)$ をみたす実数 p, q, r, s, t, u が存在すると仮定する。右辺を展開すると

$$(px+qy+r)(sx+ty+u)=psx^2+qty^2+(pt+qs)xy+(pu+sr)x+(qu+rt)y+ru$$

であるから、 x, y の恒等式とみて

$$\begin{cases} ps=1 & \dots\dots ① \\ qt=1 & \dots\dots ② \\ pt+qs=0 & \dots\dots ③ \\ pu+sr=0 & \dots\dots ④ \\ qu+rt=0 & \dots\dots ⑤ \\ \end{cases}$$

となる。①, ②より

$$s=\frac{1}{p}, t=\frac{1}{q}$$

であり、④に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{p}{q}+\frac{q}{p} &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2+q^2 &= 0 \text{ かつ } p\neq 0, q\neq 0 \end{aligned}$$

であるが、これを満たす p, q は存在しない。よって条件を満たす実数 p, q, r, s, t, u は存在しない。

(証明終)

(4)

$x^2+y^2-5-c(xy-2)$ が x, y の1次式の積で表されるとき、以下の x についての方程式

$$x^2-cyx+y^2-5+2c=0$$

の解は y の一次式で表される。よって判別式について、ある実数 a, b が存在して

$$(-cy)^2-4(y^2-5+2c)=(ay+b)^2$$

を満たせばよい。整理すると

$$(c^2-4)y^2+20-8c=a^2y^2+2aby+b^2$$

となるから、両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} c^2-4=a^2 & \dots\dots ⑦ \\ 2ab=0 & \dots\dots ⑧ \\ 20-8c=b^2 & \dots\dots ⑨ \end{cases}$$

が成り立つ。⑧より $a=0$ または $b=0$ となる。

[1] $a=0$ のとき

⑦に代入すると

$$c^2-4=0\Leftrightarrow c=\pm 2$$

となり、それぞれの場合において⑨から

$$b=\pm\sqrt{20-8\cdot 2}=\pm 2 \qquad (c=2 \text{ のとき})$$

$$b=\pm\sqrt{20-8\cdot (-2)}=\pm 6 \qquad (c=-2 \text{ のとき})$$

となる。よって $c=\pm 2$ のとき実数 a, b が存在し、条件を満たす。

[2] $b=0$ のとき

⑨に代入すると

$$c=\frac{5}{2}$$

となり、これを⑦に代入すると

$$a=\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4}=\pm\frac{3}{2}$$

となる。よって $c=\frac{5}{2}$ のとき実数 a, b が存在し、条件を満たす。

以上[1], [2]より条件を満たす c の値は $c=-2, 2, \frac{5}{2}$ である。

(答) $c=-2, 2, \frac{5}{2}$

2

(1)

(F の x 座標) > (F' の x 座標) とすると、 $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ より $FA = F'A$ である。

また楕円の定義より $FA + F'A = 2a$ であるから $FA = a$ となる。いま、 $OA = b$ であるから、

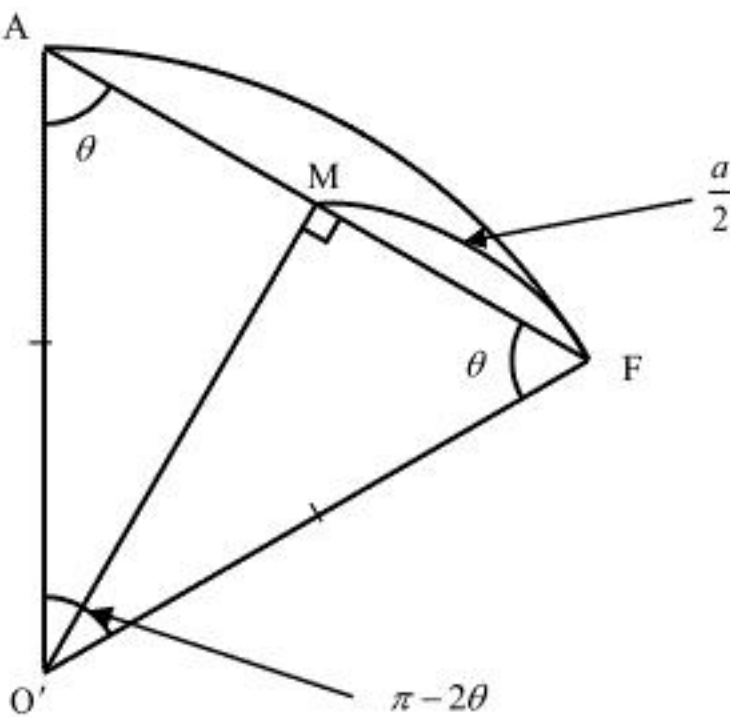
$$\cos \theta = \frac{OA}{FA} = \frac{b}{a}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{b}{a}$$

(2)

$\triangle O'AF$ は $O'A = O'F$ の二等辺三角形であるから、 O から線分 AF に下した垂線の足を M とすると M は線分 AF の中点であり、以下の図を得る。



上図より、

$$O'F = \frac{\frac{a}{2}}{\cos \theta} = \frac{a}{2 \cos \theta}$$

となり、扇形 $O'AF$ の面積は

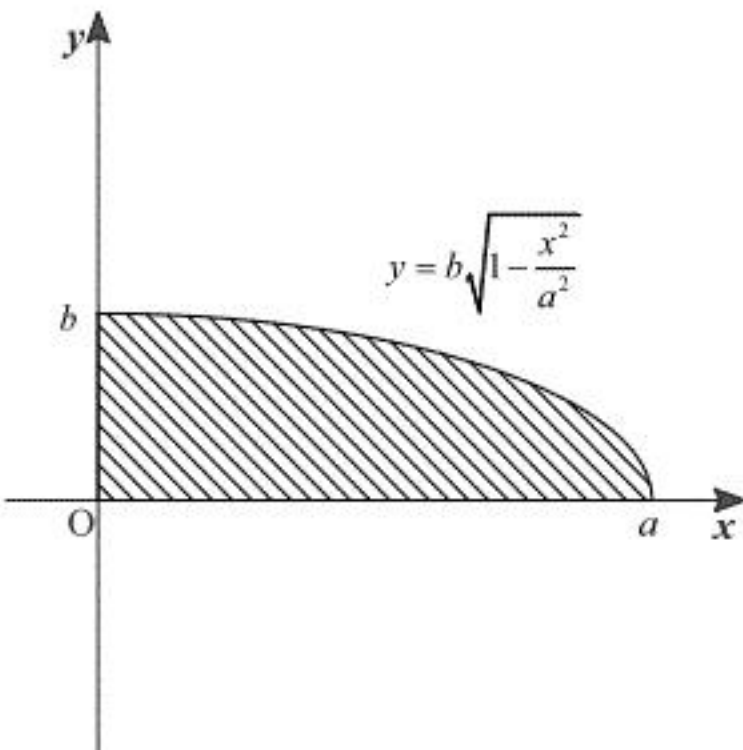
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (O'F)^2 (\pi - 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2 \cos \theta} \right)^2 (\pi - 2\theta) \\ &= \frac{a^2 (\pi - 2\theta)}{8 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{a^2 (\pi - 2\theta)}{8 \cos^2 \theta}$$

(3)

円 $x^2 + y^2 = b^2$ の面積は $b^2 \pi$ であるから、題意を示すには楕円の面積が $b^2 \pi \cdot \frac{a}{b} = ab\pi$ であることを示せばよい。また、この楕円は x 軸に対しても y 軸に対しても対称であるから、楕円の面積は下図の斜線部分の面積の 4 倍である。



いま、 $x = a \sin t$ ($-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと、 $\frac{dx}{dt} = a \cos t$ となり、また対応表は以下のようになる。

x	0	$\rightarrow$	a
t	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

楕円の面積を T とすると、

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} ab\pi \end{aligned}$$

$$\therefore T = ab\pi$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(4)

$b : a = 1 : 2$ のとき、 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ より (1) から $\cos \theta = \frac{1}{2}$ である。いま、 $0 \leq \theta < \pi$ であるから、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ を

得る。このとき、

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^2 \left(\pi - \frac{2}{3} \pi \right)}{8 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2} \\ &= \frac{a^2 \pi}{6} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{a^2 \pi}{6}$$

3

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(1-x) \\
 \Leftrightarrow \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}} &= \frac{2^{1-x}}{2^{1-x} + \sqrt{2}} \\
 \Leftrightarrow 2^x (2^{1-x} + \sqrt{2}) &= 2^{1-x} (2^x + \sqrt{2}) \\
 \Leftrightarrow 2 + 2^{x+\frac{1}{2}} &= 2 + 2^{\frac{3}{2}-x} \\
 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} - x \\
 \therefore x &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

である。

(答) $x = \frac{1}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}
 f(x) + f(1-x) &= \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{2^{1-x}}{2^{1-x} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{2^x (2^{1-x} + \sqrt{2}) + 2^{1-x} (2^x + \sqrt{2})}{(2^x + \sqrt{2})(2^{1-x} + \sqrt{2})} \\
 &= \frac{2 + 2^{x+\frac{1}{2}} + 2 + 2^{\frac{3}{2}-x}}{2 + 2^{x+\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}-x} + 2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

である。

(答) 1

(3)

前問の結果を利用すると、

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{2018} f\left(\frac{n}{2019}\right) \\
 &= f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) \\
 &= \left\{f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right)\right\} + \left\{f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right)\right\} + \cdots + \left\{f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right)\right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{1009} \left\{f\left(\frac{n}{2019}\right) + f\left(1 - \frac{n}{2019}\right)\right\} \\
 &= 1 \cdot 1009 \\
 &= 1009
 \end{aligned}$$

を得る。

(答) 1009

(4)

$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$ (C は積分定数)であることを利用して、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}} dx \\
 &= \frac{1}{\log 2} \left[\log|2^x + \sqrt{2}| \right]_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \left(\because (2^x + \sqrt{2})' = 2^x \cdot \log 2 \right) \\
 &= \frac{1}{\log 2} \left(\log 17\sqrt{2} - \log \frac{17}{8\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{17\sqrt{2}}{\frac{17}{8\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{\log 2} \cdot \log 16 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

を得る。

(答) 4

(1)

$f(x) = x - \log x (x > 1)$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より $f(x)$ は単調増加である。いま, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$ より $f(x) > 1$ が言えるから, $x - \log x \geq 1$ は

示された。

(証明終)

(2)

$g(x) = 2(\sqrt{x} - 1) - \log x (x \geq 1)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \end{aligned}$$

となり, $x \geq 1$ より $g'(x) \geq 0$ であるから, $g(x)$ は単調増加である。いま, $g(1) = 0$ より $g(x)$

≥ 0 となるから, 正の整数 n に対して $2(\sqrt{n} - 1) \geq \log n$ は示された。

(証明終)

(3)

$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} (1 \leq k \leq n-1, k \text{ は整数})$ において, $\log x$ は単調増加であるから, $\log \frac{k}{n} \leq \log x$

$\leq \log \frac{k+1}{n}$ が言える。よって,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log \frac{k}{n} dx &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log x dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log \frac{k+1}{n} dx \\ \Leftrightarrow \left(\log \frac{k}{n} \right) \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log x dx \leq \left(\log \frac{k+1}{n} \right) \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \log \frac{k}{n} &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log x dx \leq \frac{1}{n} \log \frac{k+1}{n} \end{aligned}$$

これは $k=1, 2, \dots, n-1$ のすべてで成立するから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \log \frac{k}{n} \right) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log x dx \right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \log \frac{k+1}{n} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k}{n} &\leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k+1}{n} \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log k \right) - \log n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\log k - \log n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{k}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k}{n} \left(\because \log \frac{n}{n} = 0 \right) \end{aligned}$$

と変形できる。これにより (3) から,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k}{n} &\leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log k \right) - \log n &\leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。一方,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k+1}{n} &= \frac{1}{n} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k}{n} \right) - \log \frac{1}{n} \right\} \left(\because \log \frac{n}{n} = 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k}{n} \right) + \frac{1}{n} \log n \end{aligned}$$

より, (3) から

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k+1}{n} \\ \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k}{n} \right) + \frac{1}{n} \log n \\ \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx - \frac{1}{n} \log n &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log k \right) - \log n \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。よって ①, ② より

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx - \frac{1}{n} \log n \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log k \right) - \log n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで, 部分積分を用いると積分定数を C として

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - x + C \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx - \frac{1}{n} \log n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left([x \log x - x]_{\frac{1}{n}}^1 - \frac{1}{n} \log n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 - \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \log n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{n} \log n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \log n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} [x \log x - x]_{\frac{1}{n}}^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 - \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{n} \log n + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

であるが, ここで, (2) より $\log n \leq 2(\sqrt{n} - 1)$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{n} \log n + \frac{1}{n} \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{2(\sqrt{n} - 1)}{n} + \frac{1}{n} \right) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx &\leq -1 \end{aligned}$$

を得る。よって, ③ および $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx - \frac{1}{n} \log n \right) = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx \leq -1$ より, はさみうち

の原理から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log k \right) - \log n \right\} = -1$$

となる。

(答) -1