

1.

〔解答〕

①	②
8	$\sqrt{7}$

〔解説〕

男子、女子が食べた皿の平均枚数をそれぞれ $\overline{x_a}$, $\overline{x_b}$, 皿の枚数の2乗の平均値を $\overline{x_a^2}$, $\overline{x_b^2}$, 分散を s_a^2 , s_b^2 , 標準偏差を s_a , s_b とおく。さらに、男女合わせたときの皿の枚数の平均値を $\overline{x}$, 2乗の平均値を $\overline{x^2}$, 分散を s^2 , 標準偏差を s とおく。題意より,

$$\overline{x_a} = 9, \overline{x_b} = 6, s_a = \sqrt{3}, s_b = 3$$

である。以上より,

$$\begin{aligned} 15\overline{x} &= 10\overline{x_a} + 5\overline{x_b} \\ &= 10 \cdot 9 + 5 \cdot 6 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{x} = 8$$

となる。また,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} s_a^2 = \overline{x_a^2} - (\overline{x_a})^2 \\ s_b^2 = \overline{x_b^2} - (\overline{x_b})^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (\sqrt{3})^2 = \overline{x_a^2} - 9^2 \\ 3^2 = \overline{x_b^2} - 6^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \overline{x_a^2} = 84 \\ \overline{x_b^2} = 45 \end{cases} \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} 15\overline{x^2} &= 10\overline{x_a^2} + 5\overline{x_b^2} \\ &= 10 \cdot 84 + 5 \cdot 45 \\ &= 1065 \\ \therefore \overline{x^2} &= 71 \end{aligned}$$

となる。以上より分散 s^2 は,

$$\begin{aligned} s^2 &= \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \\ &= 71 - 64 \\ &= 7 \end{aligned}$$

であり, 求める標準偏差 s は,

$$s = \sqrt{7}$$

となる。

2.

〔解答〕

③	④
$\frac{19}{36}$	$\frac{2}{19}$

〔解説〕

題意より、①の判別式を D とすると、①が実数解をもつ条件は、

$$D \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b \geq 0$$

である。ここで、大小2個のさいころの目の出方は全部で36通りあり、このうち上記の条件を満たす (a, b) の組み合わせは、

$$(a, b) = (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), \\ (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$$

の19通りである。よって実数解をもつ確率は、

$$\frac{19}{36}$$

である。また、その解が重解であるのは $D=0$ のとき、つまり $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ のときのみである。以上より求める条件付き確率は、

$$\frac{\frac{2}{36}}{\frac{19}{36}} = \frac{2}{19}$$

となる。

3.

〔解答〕

	⑤	⑥
(1)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
	⑦	
(2)	$\frac{x}{2}-1$	
	⑧	⑨
(3)	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

〔解説〕

(1)

$$x^2 + y^2 + 2kx + (k+2)y - \frac{1}{4}k - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+k)^2 + \left(y + \frac{k+2}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}k^2 + \frac{5}{4}k + \frac{5}{4}$$

であるので、円 C の半径を r とおくと、

$$r^2 = \frac{5}{4}k^2 + \frac{5}{4}k + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{5}{4}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

と表すことができる。以上より $r > 0$ に注意して、 r は $k = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{15}}{4}$ をとる。

(2)

円 C の中心の座標を (X, Y) とおくと(1)より、

$$\begin{cases} X = -k \\ Y = -\frac{k+2}{2} \end{cases}$$

と表すことができる。この2式から k を消去して、

$$Y = \frac{1}{2}X - 1$$

となる。よって求める直線は $y = \frac{1}{2}x - 1$ である。

(3)

$$x^2 + y^2 + 2kx + (k+2)y - \frac{1}{4}k - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x + y - \frac{1}{4}\right)k + \left(x^2 + y^2 + 2y - \frac{1}{4}\right) = 0$$

であるので、求める定点は、

$$\begin{cases} 2x + y - \frac{1}{4} = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

を満たす点 (x, y) である。よって、

$$\begin{cases} 2x + y - \frac{1}{4} = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}, -\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{4}\right) \text{ (複号同順)}$$

であるので、求める x 座標は $x = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ となる。

4.

〔解答〕

(1)	⑩	
	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	
(2)	⑪	⑫
	$\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}$	$\frac{3(n-1)(n+2)}{2n(n+1)}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k\{n-(k-1)\} &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\} \\
 &= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)\sum_{k=1}^n k \\
 &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\
 &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)
 \end{aligned}$$

である。

(2)

題意より、 $b_{n+1} - b_n = a_n$ であるので a_n は b_n の階差数列である。よって $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned}
 b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
 &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) \\
 &= \frac{1}{6} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \right\} \\
 &= \frac{1}{6} \left[\left\{ \frac{1}{2}n(n-1) \right\}^2 + 3 \cdot \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) \right] \\
 &= \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)
 \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ でも成立する。また、 $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{a_n}$ であるので、 $\frac{1}{a_n}$ は c_n の階差数列である。

よって、

$$\begin{aligned}
 c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} \\
 &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6}{k(k+1)(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} 3 \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\
 &= 3 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right\} \\
 &= 3 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right\} \\
 &= \frac{3(n-1)(n+2)}{2n(n+1)}
 \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ でも成立する。

5.

〔解答〕

(1)	⑬				
	平行四辺形				
(2)	⑭	⑮	⑯	⑰	⑱
	$s^2 + (t-1)^2 = 2$	-1	0	1	2

〔解説〕

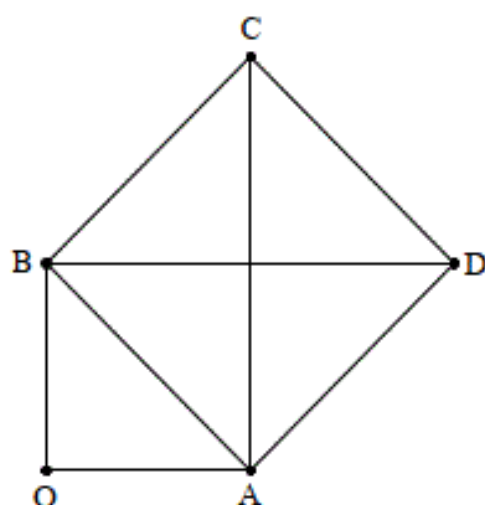
(1)

題意より,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \\
 &= (s+1)\overrightarrow{OA} + (t-1)\overrightarrow{OB} - s\overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OB} \\
 &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \\
 &= \overrightarrow{BA}
 \end{aligned}$$

であるので, 四角形 ABCD は平行四辺形である。

(2)



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ である。(1)より四角形 ABCD は平行四辺形である

ので四角形 ABCD がひし形になるための条件は, $AC \perp BD$ である。よって,

$$\begin{aligned}
 AC &\perp BD \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \{(s-1)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot \{(s+1)\vec{a} + (t-2)\vec{b}\} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (s-1)(s+1)|\vec{a}|^2 + t(t-2)|\vec{b}|^2 + \{(s-1)(t-2) + (s+1)t\}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\
 \Leftrightarrow s^2 + t^2 - 2t - 1 = 0 \quad (\because |\vec{a}| = |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) &\quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。さらに, 四角形 ABCD が正方形となる条件は $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ であるので,

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{BD}|^2 \\
 \Leftrightarrow |(s-1)\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |(s+1)\vec{a} + (t-2)\vec{b}|^2 \\
 \Leftrightarrow (s-1)^2 + t^2 &= (s+1)^2 + (t-2)^2 \\
 \therefore s - t &= -1 \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

である。①, ②より求める (s, t) の組は $(s, t) = (-1, 0), (1, 2)$ となる。

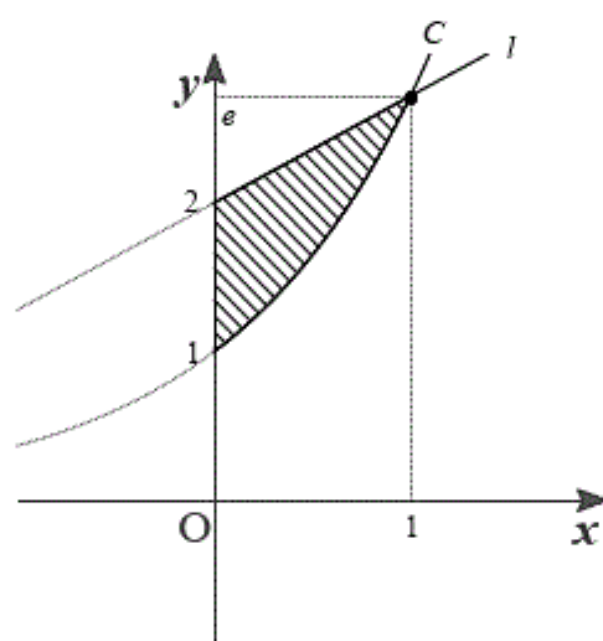
6.

〔解答〕

	⑭
(1)	$2 - \frac{e}{2}$
	⑮
(2)	$\frac{2(e-2)\pi}{3}$

〔解説〕

(1)



領域 D は上図の斜線部であるので、領域 D の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e+2) \cdot 1 - \int_0^1 e^x dx &= \frac{1}{2}(e+2) - [e^x]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(e+2) - (e-1) \\ &= 2 - \frac{e}{2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

求める立体の体積を V とおくと、

$$V = \pi \int_1^e x^2 dy - \pi \cdot 1^2 \cdot (e-2) \cdot \frac{1}{3}$$

と表すことができる。ここで、 $y=e^x$ であるので $\frac{dy}{dx}=e^x$ であり、 y が $1 \rightarrow e$ を動くとき x は

$0 \rightarrow 1$ を動く。よって、

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 dy &= \int_0^1 x^2 e^x dx \\ &= \int_0^1 (x^2 e^x)' dx - 2 \int_0^1 (x e^x)' dx + 2 \int_0^1 e^x dx \\ &= [x^2 e^x]_0^1 - 2[x e^x]_0^1 + 2[e^x]_0^1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

となる。以上より求める立体の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= (e-2)\pi - \left(\frac{1}{3}e - \frac{2}{3}\right)\pi \\ &= \frac{2(e-2)}{3}\pi \end{aligned}$$

である。