

【解答】

(1)	ア	イ		
	1	8		
(2)	ウ			
	5			
(3)	エ	オ	カ	キ
	0	3	5	9

【解説】

(1)

①の判別式を D とする。①が異なる2つの実数解をもつ条件は $D > 0$ であるから、

$$9 - 4(2m + 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{1}{8}$$

である。

(2)

3でない方の②の解を α とおく。このとき、解と係数の関係から $3 + \alpha = -2$ となる。したがって、 $\alpha = -5$ である。

(3)

①と②の共通の実数解を α とおく。このとき、

①かつ②

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2m + 2 = 0 \text{ かつ } \alpha^2 + 2\alpha - m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2m + 2 = 0 \text{ かつ } 3\alpha^2 + \alpha - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2m + 2 = 0 \text{ かつ } \alpha = -\frac{4}{3}, 1$$

となる。 $\alpha^2 - 3\alpha + 2m + 2 = 0$ に $\alpha = -\frac{4}{3}$ を代入すると、

$$\frac{16}{9} + 4 + 2m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{35}{9}$$

となる。 $\alpha^2 - 3\alpha + 2m + 2 = 0$ に $\alpha = 1$ を代入すると、

$$1 - 3 + 2m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

となる。以上により、求める m の値は $m = 0, -\frac{35}{9}$ である。

【解答】

(1)	ク	ケ	コ
	3	4	0
(2)	サ	シ	
	3	7	
(3)	ス	セ	
	6	5	

【解説】

(1)

1から999までの整数のうち3で割り切れるものは、 $999 = 333 \cdot 3$ より333個ある。1から2020までの整数のうち3で割り切れるものは、 $2020 = 673 \cdot 3 + 1$ より673個ある。したがって、1000から2020までの整数のうち3で割り切れるものは、 $673 - 333 = 340$ より340個ある。

(2)

[1] 千の位が1のとき

n を0から9までのうち1でない整数とすると、残りの3つの数字は、 $1, 1, n$ か、 n, n, n である。 $1, 1, n$ のとき、 n の選び方が9通り、 $1, 1, n$ の並べ方が3通りあるから、条件を満たす整数は $9 \cdot 3 = 27$ より27個ある。 n, n, n のとき、 n の選び方が9通りあるから、条件を満たす整数は9個ある。よって、千の位が1のときに条件を満たす整数は $27 + 9 = 36$ より36個ある。

[2] 千の位が2のとき

条件を満たす整数は2000の1個のみである。

以上[1], [2]より、求める個数は $36 + 1 = 37$ より37個である。

(3)

[1] $a=1$ のとき

$c = k$ ($k = 0, 1, \dots, 9$)とする。このとき、 b と d についての条件は、

$$b + d = k + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq b \leq 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$0 \leq d \leq 9 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。 $\textcircled{1}$ より $d = k + 1 - b$ であり、 $\textcircled{3}$ に代入して整理すると $k - 8 \leq b \leq k + 1$ となる。これと $\textcircled{2}$ を満たす b の個数は、 $0 \leq k \leq 8$ のときに $0 \leq b \leq k + 1$ より $k + 2$ 個、 $k = 9$ のときに $1 \leq b \leq 9$ より9個ある。ゆえに、 $a = 1$ の下で与えられた条件を満たす整数は、

$$\sum_{k=0}^8 (k + 2) + 9 = 63$$

より、63個ある。

[2] $a=2$ のとき

$b = 0, 0 \leq c \leq 2$ であるから、条件を満たす整数は、2002, 2013の2個ある。

以上[1], [2]より、求める個数は $63 + 2 = 65$ より65個である。

【解答】

(1)	ソ	タ	チ	ツ	テ						
	3	1	0	1	0						
(2)	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ
	3	1	0	2	1	1	0	8	1	1	0

【解説】

(1)

$y = -\frac{1}{3}x + 2$ は $x + 3y - 6 = 0$ と表せるから、点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|0+9-6|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

より、求める距離は $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ である。

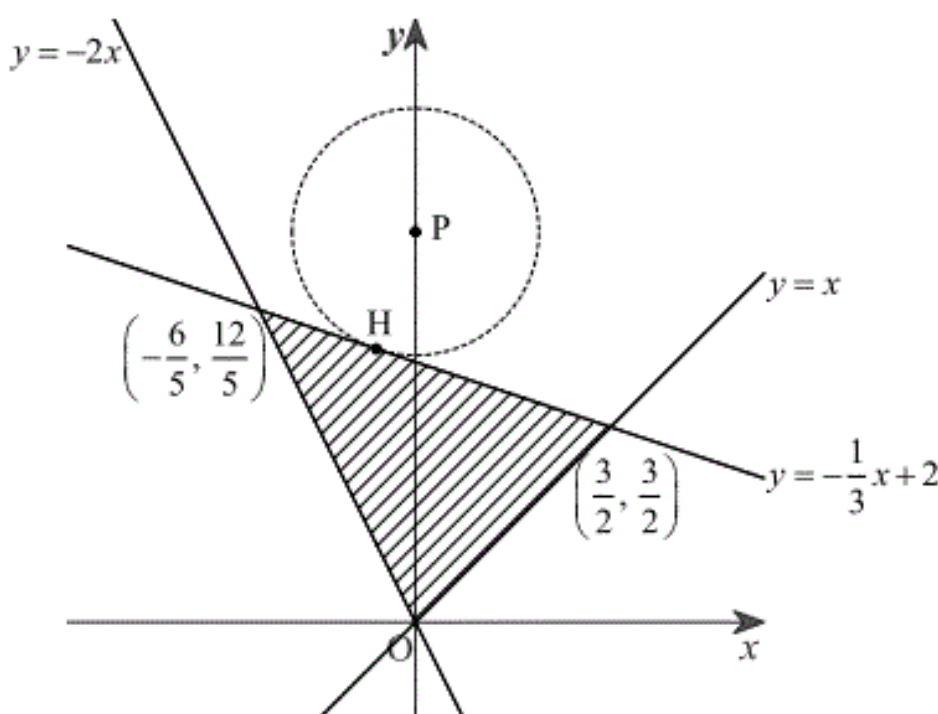
(2)

k を実数として、 $x^2 + y^2 - 6y = k$ とおく。これは、

$$x^2 + (y-3)^2 = k+9 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形でき、 xy 平面上では中心 $P(0, 3)$ 、半径 $\sqrt{k+9}$ の円を表す。

ここで、与えられた連立不等式が表す領域を図示すると、以下の斜線部である。ただし、斜線部は境界を含む。



このとき、上図で示した領域と円①が共有点をもつように k は動きうる。いま、点 P から直

線 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ におろした垂線の足を H とする。直線 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ よ

り、単位法線ベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ である。(1)より $PH = \frac{3}{\sqrt{10}}$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。よって $H\left(-\frac{3}{10}, \frac{21}{10}\right)$ であり、この点は斜線部に含まれている。ゆえに、 k が最小に

なるのは、円①が直線 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ と接するときであり、このときの円①の半径は $\frac{3}{\sqrt{10}}$ であ

る。したがって、

$$\sqrt{k+9} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow k = -\frac{81}{10}$$

となる。

以上より、 $x^2 + y^2 - 6y$ は $(x, y) = \left(-\frac{3}{10}, \frac{21}{10}\right)$ のとき最小値 $-\frac{81}{10}$ をとる。

【解答】

(1)	マ	ミ	ム	メ	モ
	9	4	2	7	2
(2)	ヤ	ユ			
	2	3			

【解説】

(1)

$a_3 = 5a_2 + 14a_1 = 94$ である。特性方程式 $x^2 = 5x + 14$ を解くことで、漸化式は

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} = 7(a_{n+1} + 2a_n) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 7a_n) \quad \dots \textcircled{2}$$

と変形できる。①について、数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ は初項が $a_2 + 2a_1 = 18$ 、公比が 7 の等比数列であるから、

$$a_{n+1} + 2a_n = 18 \cdot 7^{n-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。②について、数列 $\{a_{n+1} - 7a_n\}$ は初項が $a_2 - 7a_1 = 9$ 、公比が -2 の等比数列であるから、

$$a_{n+1} - 7a_n = 9 \cdot (-2)^{n-1} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。よって、③-④より $9a_n = 18 \cdot 7^{n-1} - 9 \cdot (-2)^{n-1}$ 、すなわち $a_n = 2 \cdot 7^{n-1} - (-2)^{n-1}$ となる。

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{2 \cdot 7^{k-1} - (-2)^{k-1}\} \\ &= 2 \cdot \frac{7^n - 1}{7 - 1} - \frac{(-2)^n - 1}{-2 - 1} \\ &= \frac{7^n + (-2)^n - 2}{3} \end{aligned}$$

である。

【解答】

(1)	ヨ	ラ	リ	ル	レ	ロ	
	1	8	2	3	5	5	
(2)	ワ	あ	い	う	え	お	か
	3	8	8	1	3	4	0

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\
 &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

である。また,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5} \overrightarrow{OB}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \\
 &= \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 5\overrightarrow{OC}}{5}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくと,

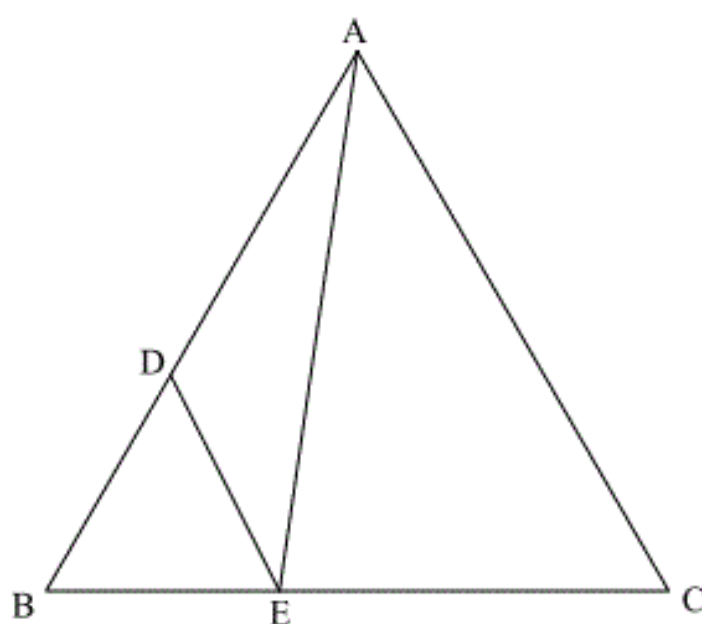
$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 36$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 18$$

である。実数 s を用いて $\overrightarrow{OE} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c}$ と表せるから,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{5} (2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}) \cdot \{(1-s)\vec{b} + s\vec{c}\} \\
 &= \frac{1}{5} \{(1-s)(2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}) \cdot \vec{b} + s(2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}) \cdot \vec{c}\} \\
 &= \frac{1}{5} \{(1-s)(2 \cdot 18 + 3 \cdot 36 - 5 \cdot 18) + s(2 \cdot 18 + 3 \cdot 18 - 5 \cdot 36)\} \\
 &= \frac{18}{5} (3 - 8s)
 \end{aligned}$$

となる。 $CD \perp OE$ ならば $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$ のため, $s = \frac{3}{8}$ である。



$\triangle ABC$ の面積は, $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ である。よって, $AD:DB=3:2$, $BE:EC=3:5$ より, $\triangle ADE$ の面積は,

$$\begin{aligned}
 9\sqrt{3} \cdot \frac{BE}{BC} \cdot \frac{AD}{AB} &= 9\sqrt{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} \\
 &= \frac{81\sqrt{3}}{40}
 \end{aligned}$$

である。

【解答】

(1)	き	く	け	こ
	2	1	1	2
(2)	さ	し	す	
	0	1	2	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\
 &= x(2 \log x + 1)
 \end{aligned}$$

である。真数条件より $f(x)$ の定義域は $x > 0$ であることに注意すると、 $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	0	...	$e^{-\frac{1}{2}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	(0)	$\searrow$	極小	$\nearrow$

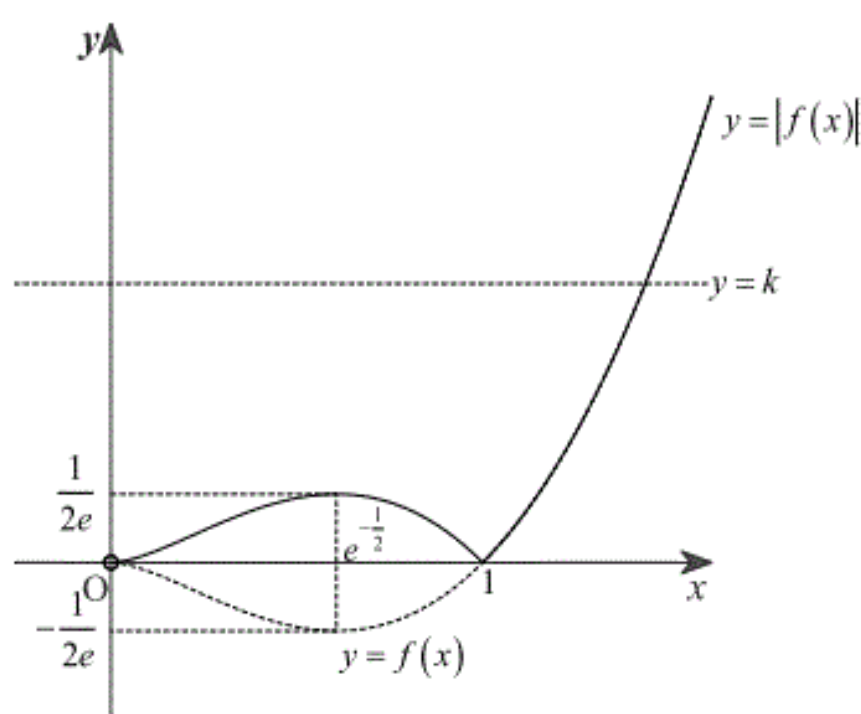
よって、 $f(x)$ は $x = e^{-\frac{1}{2}}$ で極小値

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

をとる。

(2)

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ と(1)を合わせて考えると、 $y = |f(x)|$ のグラフは以下の実線部（白丸は含まない）のようになる。



$|f(x)| = k$ の実数解の数が1個である条件は、 $y = |f(x)|$ のグラフと直線 $y = k$ が1点のみ共有点をもつことである。したがって、求める条件は上図より、

$$k = 0, k > \frac{1}{2e}$$

である。