

1.

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ			
	7	–	3			
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	6	7	1	6	–	3
(3)	コ	サ	シ	ス		
	7	1	3	2		

〔解説〕

(1)

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, x \geq 0$ より, $x = 2 \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とおける。よって, $x + y$ を θ の式で表すと,

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ &= \sqrt{7} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

となる。ただし α は $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($\because \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$) を満たす定数で

ある。ここで $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \alpha < 0, \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \alpha < \pi$ より, $\theta + \alpha$ が $-\frac{\pi}{2} + \alpha \leq \theta + \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$ の範囲を

動くとき, $x + y$ は $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大値 $\sqrt{7}$ をとり, $\theta + \alpha = -\frac{\pi}{2} + \alpha \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

のとき, 最小値

$$\begin{aligned} \sqrt{7} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= -\sqrt{7} \cos \alpha \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

をとる。

(2)

(1)と同様にして $x^2 + y$ を θ の式で表すと,

$$\begin{aligned} x^2 + y &= 4 \cos^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ &= 4(1 - \sin^2 \theta) + \sqrt{3} \sin \theta \\ &= -4 \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)^2 + \frac{67}{16} \end{aligned}$$

となる。ここで, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ であるから, $x^2 + y$ は $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{8}$ のとき最大値

$\frac{67}{16}$ をとり, $\sin \theta = -1$ のとき最小値

$$4\{1 - (-1)^2\} + \sqrt{3} \cdot (-1) = -\sqrt{3}$$

をとる。

(3)

(1), (2)と同様にして $x^2 + xy + y^2$ を θ の式で表すと,

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 4 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \sin^2 \theta \\ &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \sin 2\theta + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \sqrt{3} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{7}{2} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2} \sin(2\theta + \beta) + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。ただし β は $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{13}}, \cos \beta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ($\because \sin \beta > 0, \cos \beta > 0$) を満たす定数

である。ここで $-\pi < -\pi + \beta < -\frac{\pi}{2}, \pi < \pi + \beta < \frac{3}{2}\pi$ より, $2\theta + \beta$ が $-\pi + \beta \leq 2\theta + \beta \leq \pi + \beta$ の

範囲を動くとき, $x^2 + xy + y^2$ は $2\theta + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$ のとき最大値 $\frac{7 + \sqrt{13}}{2}$ をとる。

2.

〔解答〕

(1)	セ	ソ	タ
	1	2	0
(2)	チ	ツ	
	5	6	
(3)	テ	ト	
	4	8	

〔解説〕

(1)

それぞれの文字が書かれたカードは3枚ずつあることに注意すると、8種類の文字から重複を許して3文字選べばよいから、3つの文字の組合せは

$${}_8H_3 = {}_{(8-1)+3}C_3 = 120 \text{ (通り)}$$

である。

(2)

立方体 ABCD-EFGH のどの3つの頂点も同一直線上に存在しないため、8つの頂点から3つの頂点を選べばよい。よって、3つの頂点を結んでできる三角形の個数は

$${}_8C_3 = 56 \text{ (個)}$$

である。

(3)

余事象、すなわち、3つの頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形でない三角形の個数を考える。すると、直角三角形とならないのは正三角形となるときであり、その個数は

$$\triangle ACF, \triangle ACH, \triangle AFH, \triangle BDE, \triangle BDG, \triangle BEG, \triangle CFH, \triangle DEG$$

の8個である。よって、(2)より、3つの頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形は

$$56 - 8 = 48 \text{ (個)}$$

できる。

3.

〔解答〕

(1)	ナ	ニ	ヌ	ネ
	2	1	2	5
(2)	ノ	ハ		
	5	2		
(3)	ヒ	フ	ヘ	
	1	4		

〔解説〕

(1)

w が実数であることは、 $w = \overline{w}$ であることと同値であるから、 $z \neq 2$ のもとで

$$\begin{aligned}
 \frac{(1-2i)z}{(z-2)i} &= \overline{\left\{ \frac{(1-2i)z}{(z-2)i} \right\}} \\
 \Leftrightarrow \frac{(1-2i)z}{(z-2)i} &= \frac{(1+2i)\overline{z}}{(\overline{z}-2)(-i)} \\
 \Leftrightarrow (1-2i)z(\overline{z}-2) &= -(1+2i)\overline{z}(z-2) \quad (\because z \neq 2) \\
 \Leftrightarrow 2z\overline{z} - 2(1-2i)z - 2(1+2i)\overline{z} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \{z - (1+2i)\}\{\overline{z} - (1-2i)\} &= 5 \\
 \Leftrightarrow \{z - (1+2i)\}\overline{\{z - (1+2i)\}} &= 5 \\
 \Leftrightarrow |z - (1+2i)| &= \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

と変形できる。よって、複素平面上で C は点 2 を除く、点 $1+2i$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円である。

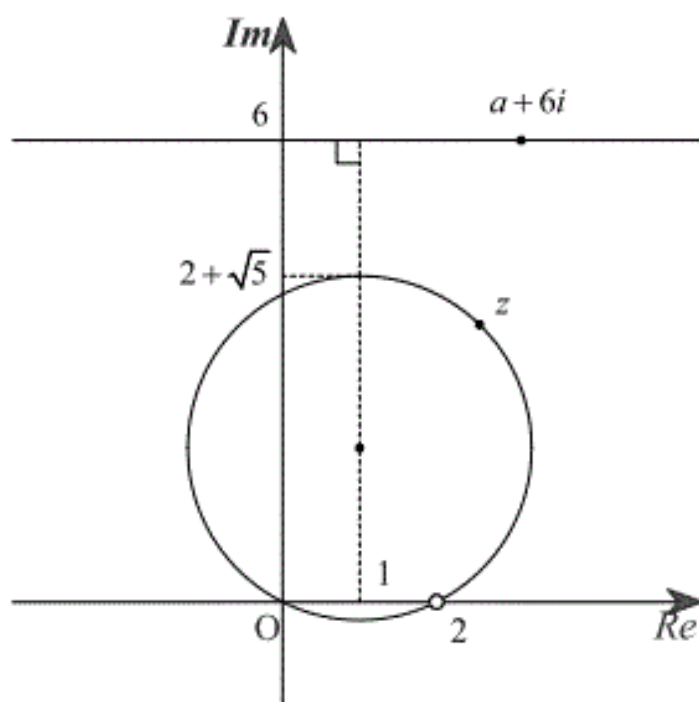
(2)

点 $A(k)$ (k は実数、 $k \neq 2$) とすると、点 A は C 上の点であるから、

$$\begin{aligned}
 \{k - (1+2i)\}\{k - (1-2i)\} &= 5 \\
 \Leftrightarrow k^2 - 2k &= 0 \\
 \Leftrightarrow k(k-2) &= 0 \\
 \therefore k &= 0 \quad (\because k \neq 2)
 \end{aligned}$$

となる。よって 2 点 A, B の距離は $|0 - (5-5i)| = 5\sqrt{2}$ である。

(3)



$|z - (a+6i)|$ は点 z と点 $a+6i$ の距離を表す。よって、図より、 $|z - (a+6i)|$ が最小となるのは

$z = 1 + (2 + \sqrt{5})i$, $a = 1$ のときであり、その最小値は

$$|1 + (2 + \sqrt{5})i - (1 + 6i)| = 4 - \sqrt{5}$$

である。

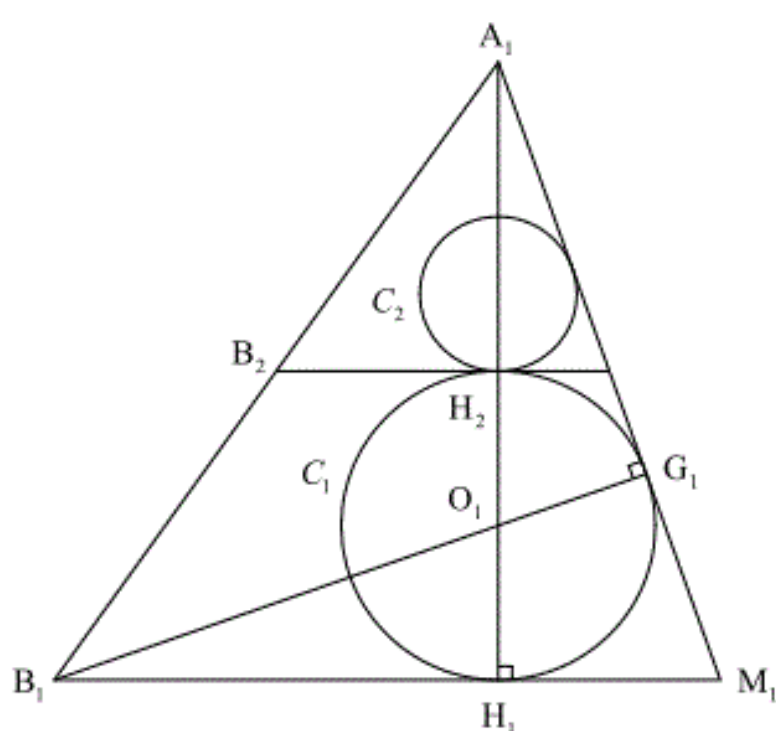
4.

〔解答〕

(1)	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ		
	6	1	2	6	3	8	4		
(2)	ユ	ヨ	ラ	リ	ル	レ	ロ	ワ	
	1	1	6	1	5	1	2	3	

〔解説〕

(1)



正四面体の4つの頂点をそれぞれ点 A_1, B_1, C_1, D_1 とし、球 C_1 の中心を点 O_1 とすると、対称性より、球 C_1 はそれぞれ $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_1B_1D_1, \triangle A_1C_1D_1, \triangle B_1C_1D_1$ の重心で接する。よって、 $\triangle A_1C_1D_1, \triangle B_1C_1D_1$ の重心をそれぞれ点 G_1, H_1 とし、辺 C_1D_1 の中点を点 M_1 とすると、 $A_1G_1 : G_1M_1 = B_1H_1 : H_1M_1 = 2 : 1$

となる。ここで、 $A_1M_1 = B_1M_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ より、

$$H_1M_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

であるから、 $\triangle A_1B_1H_1$ について三平方の定理より、

$$A_1H_1^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$\therefore A_1H_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}a \quad (\because A_1H_1 > 0)$$

となる。したがって、 $\triangle A_1M_1H_1 \sim \triangle A_1O_1G_1$ であり、その相似比は

$$A_1H_1 : A_1G_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}a : \frac{\sqrt{3}}{3}a = \sqrt{2} : 1 \text{ であるから、}$$

$$A_1O_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

より、

$$r_1 = O_1H_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$$

となる。また、球 C_2 のうち $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_1B_1D_1, \triangle A_1C_1D_1$ と接するものを考える。この球と球 C_1 の共通内接平面と辺 $A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1, A_1H_1$ との交点をそれぞれ点 B_2, C_2, D_2, H_2 とすると、

$$A_1H_2 = \frac{\sqrt{6}}{4}a - \frac{\sqrt{6}}{12}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

より、 $\triangle A_1B_1H_1 \sim \triangle A_1B_2H_2$ であり、その相似比は $A_1H_1 : A_1H_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}a : \frac{\sqrt{6}}{6}a = 2 : 1$ であるから、

$A_1B_2 = \frac{a}{2}$ となる。よって、対称性より、球 C_2 は1辺の長さが $\frac{a}{2}$ である正四面体の4つの面に

接する球であり、その半径は $r_2 = \frac{1}{2}r_1$ である。これを繰り返すと、

$$r_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 r_1 = \frac{\sqrt{6}}{384}a$$

となる。

(2)

(1)より、球 C_n の半径は、

$$r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} r_1$$

であり、その体積は、

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r_n^3 &= \frac{4}{3}\pi \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} r_1\right)^3 \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \pi r_1^3 \end{aligned}$$

と表せる。よって、求める体積の和は、球 C_1 以外の球がすべて4つずつ存在することに注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r_1^3 + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \pi r_1^3 &= \frac{\sqrt{6}}{216}\pi a^3 + \frac{\sqrt{6}}{54}\pi a^3 \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{216}\pi a^3 + \frac{\sqrt{6}}{54}\pi a^3 \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{N-1}}{1 - \frac{1}{8}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{216}\pi a^3 + \frac{\sqrt{6}}{378}\pi a^3 \\ &= \frac{11\sqrt{6}}{1512}\pi a^3 \end{aligned}$$

である。

5.

〔解答〕

(1)	あ					
	2					
(2)	い	う	え	お	か	き
	1	0	1	9	9	7
(3)	く					
	6					
(4)	け	こ	さ			
	7	2	9			

〔解説〕

(1)

$72 = 2^3 \cdot 3^2$, $48 = 2^4 \cdot 3$ より,

$$\begin{aligned}\langle\langle 72 \rangle\rangle - \langle\langle 48 \rangle\rangle &= (3+1) \cdot (2+1) - (4+1) \cdot (1+1) \\ &= 12 - 10 \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。

(2)

自然数 n の正の約数が 2 個となるのは, n が素数のときのみである。よって 100, 101, ... の順

に考えると, $\langle\langle n \rangle\rangle = 2$ を満たす n のうち, 3 桁の自然数で最小のものは 101 である。また,

1000, 999, ... の順に考えると, 最大のものは 997 である。

(3)

自然数 n の正の約数が奇数個となるのは, n が平方数のときのみである。ここで, 数列 $\{n^2\}$ は

n に関して単調増加であり,

$$3^2 < 10 < 4^2, 9^2 < 100 = 10^2$$

より, $\langle\langle n \rangle\rangle$ が奇数となる n のうち, 2 桁の自然数の個数は $4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2$ の 6 個である。

(4)

$81 = 3^4$ より $\langle\langle 81 \rangle\rangle = 5$ であるから,

$$\begin{aligned}2\langle\langle n \rangle\rangle^2 - 9\langle\langle n \rangle\rangle - 7 \times \langle\langle 81 \rangle\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\langle\langle n \rangle\rangle^2 - 9\langle\langle n \rangle\rangle - 35 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\langle\langle n \rangle\rangle - 7)(2\langle\langle n \rangle\rangle + 5) &= 0 \\ \therefore \langle\langle n \rangle\rangle = 7 \quad (\because \langle\langle n \rangle\rangle \geq 0)\end{aligned}$$

となる。ここで, $\langle\langle n \rangle\rangle = 7$ となるのは, $n = m^6$ (m は 2 以上の自然数) と表せるときのみである。

また, 数列 $\{m^6\}$ は m に関して単調増加であり,

$$2^6 < 100 < 3^6 = 729 < 1000 < 4^6$$

であるから, 求める 3 桁の自然数は 729 のみである。

6.

〔解答〕

(1)	し	す	せ	
	1	1	1	
(2)	そ	た	ち	つ
	2	2	1	2
(3)	て	と	な	に
	1	7	4	3

〔解説〕

(1)

$I_{m,n}$ の式に $n=0$ を代入すると,

$$\begin{aligned} I_{m,0} &= \int_1^e x^m dx \\ &= \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_1^e \\ &= \frac{e^{m+1} - 1}{m+1} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} I_{m+1,n+1} &= \int_1^e x^{m+1} (\log x)^{n+1} dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{x^{m+2}}{m+2} \right)' (\log x)^{n+1} dx \\ &= \left[\frac{x^{m+2}}{m+2} \cdot (\log x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^{m+2}}{m+2} \cdot (n+1) (\log x)^n \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^{m+2}}{m+2} - \frac{n+1}{m+2} \int_1^e x^{m+1} (\log x)^n dx \\ &= \frac{e^{m+2}}{m+2} - \frac{n+1}{m+2} I_{m+1,n} \end{aligned}$$

と表せる。

(3)

(2)より, $I_{m+1,n+1} = \frac{e^{m+2}}{m+2} - \frac{n+1}{m+2} I_{m+1,n}$ に $m=2$ を代入すると,

$$I_{3,n+1} = \frac{e^4}{4} - \frac{n+1}{4} I_{3,n}$$

となる。また, (1)より, $I_{m,0} = \frac{e^{m+1} - 1}{m+1}$ に $m=3$ を代入すると,

$$I_{3,0} = \frac{e^4 - 1}{4}$$

となる。以上より,

$$\begin{aligned} I_{3,3} &= \frac{e^4}{4} - \frac{3}{4} I_{3,2} \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{e^4}{4} - \frac{2}{4} I_{3,1} \right) \\ &= \frac{e^4}{16} + \frac{3}{8} \left(\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} I_{3,0} \right) \\ &= \frac{5e^4}{32} - \frac{3}{32} \cdot \frac{e^4 - 1}{4} \\ &= \frac{17e^4 + 3}{128} \end{aligned}$$

と求まる。