

数 学 問 題

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙(4 ページ)、記述式解答用紙(甲)1 枚、記述式解答用紙(乙)1 枚、記述式解答用紙(丙)1 枚、記述式解答用紙(丁)1 枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
3. 監督者の指示に従って、4 枚の記述式解答用紙の受験番号欄(それぞれ 2 カ所、合計 8 カ所)に受験番号を記入してください。
4. 試験用紙の中に、印刷が不鮮明な箇所や汚れなどがある場合には、監督者に申し出てください。
5. 解答はすべて HB の黒鉛筆または HB・0.5mm 以上の芯のシャープペンシルで記入してください。
6. 解答は、解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
7. 解答中でない解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
8. 試験時間中は不審な行動をとってはいけません。不正行為を行った受験生に対しては、全科目を無効とします。
9. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、監督者に申し出てください。
10. 試験終了のベルが鳴ると同時に解答をやめてください。
11. 問題用紙は試験終了後、持って帰ってください。

〔1〕

次の文章中の $\square$ に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた $\square$ の中に記入せよ。
途中の計算を書く必要はない。

複素数を利用して、自然数 n および π の整数倍でない θ に対して、和

$$S = 1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos 2(n-1)\theta$$

を計算することを考える。

公比 z が複素数の場合でも $z \neq 1$ であれば、よく知られた等比数列の和の公式

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} = \square \text{ (ア) } \quad \cdots (1)$$

が成り立つ。ここで、 $z = \cos k\theta + i \sin k\theta$ とおき、 k として数値 $\square \text{ (イ) }$ を選び、さらにド・モアブルの定理を活用すると、(1) 式の左辺の実数部分は S となる。

他方、 $z = \cos \square \text{ (イ) } \theta + i \sin \square \text{ (イ) } \theta$ を $\square \text{ (ア) }$ に代入して、 $\square \text{ (ア) }$ を θ の式に変形すると、

$$\square \text{ (ア) } = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \frac{\square \text{ (ウ) }}{\sin \theta - i \cos \theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} (\cos \square \text{ (エ) } + i \sin \square \text{ (オ) })$$

となる。

したがって、 $S = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \square \text{ (カ) }$ が成立する。

〔2〕

x, y, z を実数とする、行列

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$$

が $AB = BA$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) x, y, z の値を求めよ。

(2) $(A + B)^2 = pA + qB$ (ただし、 p, q は実数) と表せることを示し、 p, q の値を求めよ。

〔3〕 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。このとき、定積分 $S(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \tan \theta \cos x| dx$ を求めよ。また、 $S(\theta)$ の最小値およびそのときの θ の値を求めよ。

〔4〕 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ で、すべての自然数 n に対して a_n は正数であるとする。 $n \geq 3$ である任意の自然数 n に対して、 $\{a_n\}$ を係数に持つ3次方程式 $a_n x^3 - 3a_{n-1}x + a_{n-2} = 0$ が正の2重解を持つとき、次の問いに答えよ。

(1) 係数 a_n, a_{n-1}, a_{n-2} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) $b_n = \log_4 a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくとき、 b_n, b_{n-1}, b_{n-2} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) a_n を n の式で表せ。

〔5〕 正の実数 a に対して、関数 $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ ($x > 0$) とする。方程式 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解を持つとき、次の問いに答えよ。

(1) a が満たすべき条件を求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解のうち値の大きい方を k とする。このとき、 a を k の式で表せ。

(3) $y \geq 0$ の範囲において、曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を k の式で表せ。