

〔1〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

(1) $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta d\theta$ とする。 $n \geq 1$ である n に対して、 I_n を I_{n-1} で表すと、
 $I_n =$ (ア) である。また、 $I_0 =$ (イ) , $I_3 =$ (ウ) である。

(2) 2 次の正方行列 X, Y が

$$XY = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad YX = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

を満たし、 $X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ であるとき、 $a =$ (エ) , $b =$ (オ) , $Y =$ (カ) である。ただし、
 (カ) は数値を成分とする行列である。

〔2〕 $x > 0$ に対して, 不等式 $(x-1) \left\{ \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) - \log x \right\} \geq 0$ が成り立つことを示せ. ただし, 対数は自然対数を表す.

〔3〕

xy 平面において, 不等式 $y < \frac{10000}{x^2}$, $y < \frac{x+210}{40}$, $x > 0$, $y > 3$ をすべて満たす点 (x, y) のなかで, x および y がともに整数であるものの個数を求めよ.

[4]

異なる 3 点 A, B, C がある. 点 P はこの 3 点のいずれかの位置にあり, さいころを投げ, 出た目の数によって, P は次のように, その位置を変える:

- (i) P が A の位置にあるとき, 出た目の数が 1, 2, 3, 4, 5 なら B に移動し, 6 の目が出たら C に移動する.
- (ii) P が B の位置にあるとき, 出た目の数が 1, 2, 3, 4 なら A に移動し, 5, 6 の目が出たら C に移動する.
- (iii) P が C の位置にあるとき, 出た目の数が 1, 2, 3 なら A に移動し, 4, 5, 6 の目が出たら B に移動する.

このとき次の問いに答えよ.

- (1) P が A の位置にあるとする. さいころを 2 回続けて投げるとき, P が A にある確率, B にある確率, C にある確率をそれぞれ求めよ.
- (2) P が B の位置にあるとする. さいころを 2 回続けて投げるとき, P が A にある確率, B にある確率, C にある確率をそれぞれ求めよ.
- (3) P が C の位置にあるとする. さいころを 2 回続けて投げるとき, P が A にある確率, B にある確率, C にある確率をそれぞれ求めよ.
- (4) P が A の位置にあるとする. さいころを 4 回続けて投げるとき, P が C にある確率を求めよ.

〔5〕

実数 x に対して実数値をとる関数 $f(x)$ がある. 任意の実数 x, y に対して, 関係式 $f(x+y) = f(x)f(y)$ が成立するとき, 次の (1) ~ (4) が成り立つことを示せ.

$$(1) \quad f(1) = \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^2$$

$$(2) \quad \text{すべての実数 } x \text{ に対して, } f(x) \geq 0 \text{ かつ } f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{f(x)} \text{ である.}$$

$$(3) \quad \text{すべての実数 } x, y \text{ に対して, } f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \text{ である.}$$

$$(4) \quad f(0) \neq 0 \text{ のとき, すべての実数 } x \text{ に対して, } f(x) > 0 \text{ である.}$$