

[1]

(1)

$$(ア) \frac{5}{9} \quad (イ) \frac{103}{108}$$

(2)

$$(ウ) -\frac{20}{109}$$

(3)

$$(エ) -1 \quad (オ) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (カ) \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (キ) \frac{1}{2}$$

$$(ク) 2 \quad (ケ) \frac{3}{2}$$

[2]

ある点 (X, Y) が C_t の通過する領域に存在することは

$$(X - 2t)^2 + Y^2 = (5 - t)^2$$

を満たす実数 t が存在することと同値である。すなわち、 t の2次方程式

$$3t^2 - 2(2X - 5)t + X^2 + Y^2 - 25 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が実数解をもつような (X, Y) の条件を求めれば、その条件式は C_t の通過する領域を表す。したがって、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = (2X - 5)^2 - 3(X^2 + Y^2 - 25) \geq 0$$

より

$$X^2 - 3Y^2 - 20X + 100 \geq 0$$

$$(X - 10)^2 - 3Y^2 \geq 0$$

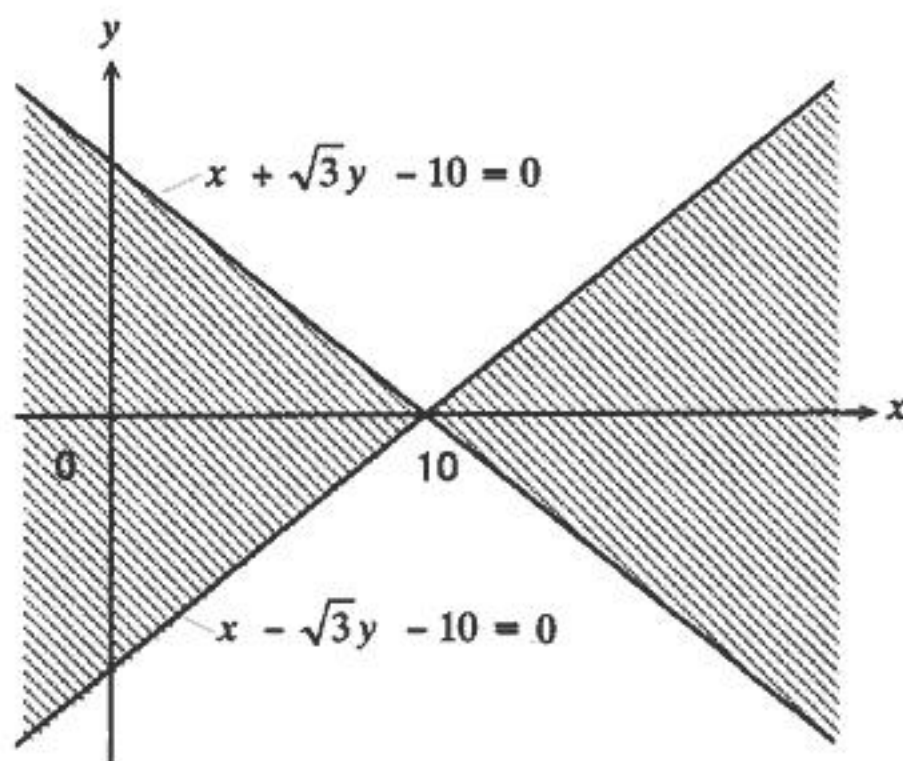
ゆえに、点 (X, Y) は不等式

$$(X - \sqrt{3}Y - 10)(X + \sqrt{3}Y - 10) \geq 0$$

を満たす。よって、 C_t の通過する領域は、不等式

$$(x - \sqrt{3}y - 10)(x + \sqrt{3}y - 10) \geq 0$$

で表される領域であり、図の斜線部分(境界線を含む)となる。



[3]

$$f(x) = x^3 - 6kx^2 + 9k^2x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12kx + 9k^2$$

$$= 3(x-k)(x-3k)$$

よって、 $f(x)$ の増減表は下図のようになり

x	...	k	...	$3k$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		極大		極小	

$$\text{極大値は } f(k) = 4k^3$$

このとき

$$f(x) = 4k^3$$

となる x の値で $x = k$ 以外のものを求める。

ここで、 $y = f(x)$ と $y = 4k^3$ が接するので、 x の方程式 $f(x) = 4k^3$ は $x = k$ を重解にもつ

$$x^3 - 6kx^2 + 9k^2x = 4k^3$$

$$x^3 - 6kx^2 + 9k^2x - 4k^3 = 0$$

$$(x-k)^2(x-4k) = 0$$

$$\therefore x = 4k \quad (\because x \neq k)$$

したがって、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値を M とおくと

(1) $0 < 4k \leq 1$ すなわち $0 < k \leq \frac{1}{4}$ のとき

$y = f(x)$ は $x = 1$ で最大値をとるから

$$M = f(1) = (1-3k)^2$$

さらに、 $0 < k \leq \frac{1}{4}$ ならば $\frac{1}{4} \leq 1-3k < 1$ である

$M = \frac{1}{2}$ であるときの k を求めると

$$(1-3k)^2 = \frac{1}{2} \text{ より } 1-3k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore k = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

(2) $4k > 1$ かつ $0 < k < 1$ すなわち $\frac{1}{4} < k < 1$

のとき、 $y = f(x)$ は $x = k$ で最大値をとるから

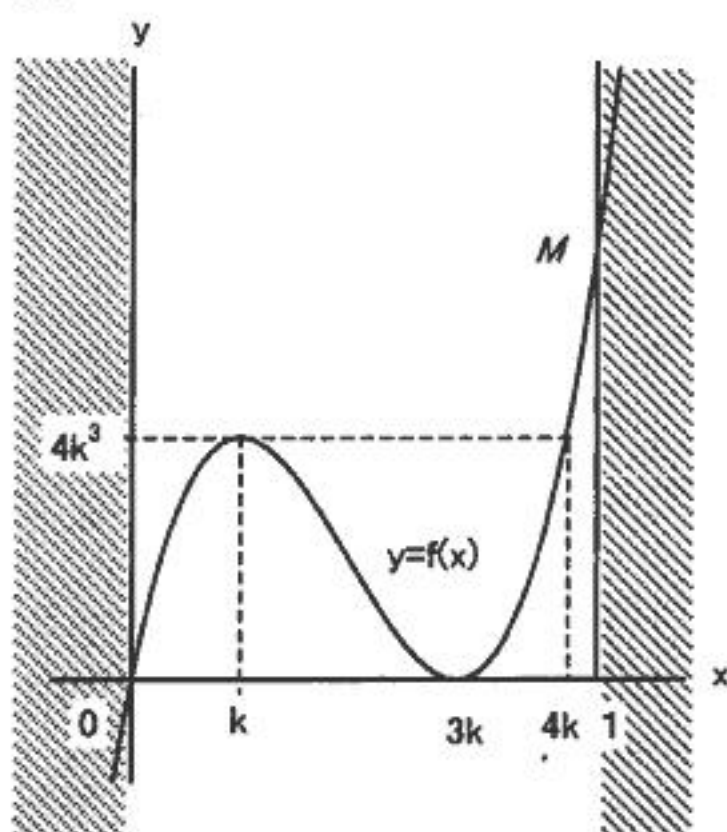
$$M = f(k) = 4k^3$$

さらに、 k の値の範囲に注意して $M = \frac{1}{2}$ となる k の値を求めると

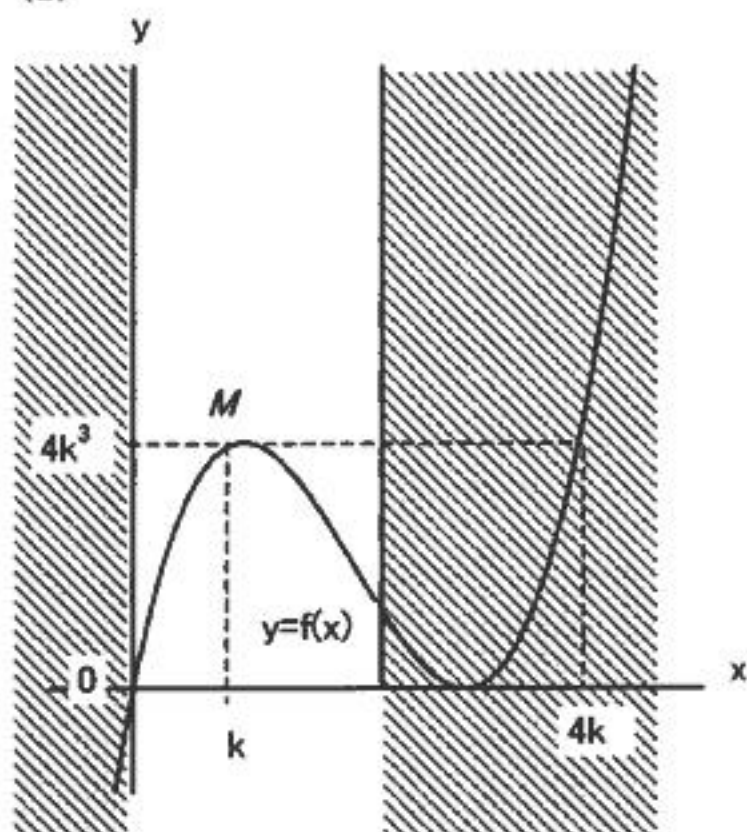
$$4k^3 = \frac{1}{2} \text{ より } k^3 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

(1)



(2)



以上により

$$M = \begin{cases} (1-3k)^2 & \left(0 < k \leq \frac{1}{4} \right) \\ 4k^3 & \left(\frac{1}{4} < k < 1 \right) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

また、 $M = \frac{1}{2}$ となる k の値は

$$k = \frac{2-\sqrt{2}}{6}, \quad \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$