

[1]

$$(ア) -4 \quad (イ) 8 \quad (ウ) -2ax + a^2 + 1 \quad (エ) a^2 - a + \frac{1}{3}$$

$$(オ) \frac{1}{12} \quad (カ) \frac{1}{3} \quad (キ) \sqrt{13} \quad (ク) 6$$

$$(ケ) \sqrt{17} \quad (コ) \sqrt{3}$$

[2]

(1)

正六角形の6頂点から異なる3頂点を選んでつくる三角形の面積には、次の3つの場合がある。正六角形と2辺を共有する三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

正六角形と1辺を共有する三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

正六角形と辺を共有しない三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

よって求める値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \dots \dots (\text{答})$$

(2)

3点 A_p, A_q, A_r が三角形の頂点となるのは、3点 A_p, A_q, A_r が異なる3点であるとき、すなわち p, q, r が、互いに異なる数であるときである。よって三角形ができる確率は、

$$\frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{5}{9}$$

また、正六角形の頂点から異なる3点を選んで三角形をつくるときの3点の選び方は

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ [通り]}$$

(1)の結果より面積が $\frac{1}{2}$ 以上1以下となるのは正六角形と1辺を共有する

ときだけである。このとき正六角形と共有する1辺のとり方は6通りでありそのそれぞれの場合について正六角形と共有する1辺にたいする頂点のとり方は2通りであるから条件を満たす三角形の個数は

$$6 \times 2 = 12 \text{ [個]}$$

ここで $\triangle A_p A_q A_r$ がいずれの三角形になるのも同様に確かであるから、求める確率は

$$\frac{5}{9} \times \frac{12}{20} = \frac{1}{3} \dots \dots (\text{答})$$

(3)

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax \quad (0 < a < 1) \\&= x\{2x^2 - 3(1+a)x + 6a\}\end{aligned}$$

より、方程式 $f(x)=0$ の実数解のうち 1 つは 0 である。

よって、方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解を持つ条件は、2 次方程式

$$2x^2 - 3(1+a)x + 6a = 0 \dots (*)$$

が 0 以外の異なる 2 つの実数解をもつことであるが、 $a \neq 0$ より

(*) が $x=0$ を解にもつことはないの、これは(*)の判別式 D が

$$D > 0$$

となることである。よって

$$D = 9(1+a)^2 - 48a > 0 \quad \text{これより}$$

$$(3a-1)(a-3) > 0$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{3} \quad (\because 0 < a < 1) \dots (\text{答})$$

(2)

方程式 $f(x)=0$ が 1 つの実数解と 2 つの虚数解をもつのは 2 次方程式

(*) が異なる虚数解をもつときである。まず(*)が異なる虚数解をもつような a の範囲を求めると判別式 $D < 0$ と $0 < a < 1$ より

$$\frac{1}{3} < a < 1 \quad \dots (i)$$

また、2 次方程式の解と係数の関係より

$$(p+q_i) + (p-q_i) = \frac{3(1+a)}{2}$$

$$\therefore p = \frac{3(1+a)}{4} \dots (ii)$$

$$(p+q_i)(p-q_i) = 3a$$

$$\therefore p^2 + q^2 = 3a \dots (iii)$$

このとき、 S を

$$S = 3p^2 - 5q^2$$

$$= 8p^2 - 5(p^2 + q^2)$$

と変形し(ii)、(iii)を代入すると

$$S = 8 \times \frac{9(1+a)^2}{16} - 5 \times 3a$$

$$= \frac{9}{2}a^2 - 6a + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{9}{2}\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

よって、 S のグラフは点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)$ を頂点とする、下に凸の 2 次曲線になり、

$a = \frac{2}{3}$ は(i)を満たしているの、 S は $a = \frac{2}{3}$ のとき最小値 $\frac{5}{2}$ をとる。.....(答)