

{1}

$$(1)(ア) 25 \quad (イ) 5$$

$$(2)(ウ) -\frac{1}{2} \quad (エ) 3 \quad (オ) \frac{5}{2} \quad (カ) -3$$

$$(3)(キ) \frac{3-2a}{2(a+b)} \quad (ク) -\frac{3a+b}{a}$$

(2)

$$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta, \quad \sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta \quad \text{より}$$

円 C_1 , C_2 の方程式は

$$C_1: (x + 2\sin\theta)^2 + (y - 2\cos\theta)^2 = 2^2$$

$$C_2: (x - \cos 2\theta)^2 + (y - \sin 2\theta)^2 = 1$$

と書ける。円 C_1 と x 軸の交点を求めるために C_1 の式で $y = 0$ とすると

$$(x + 2\sin\theta)^2 = 2^2(1 - \cos^2\theta) \\ = 2^2 \sin^2\theta$$

両方の平方根をとって

$$x + 2\sin\theta = \pm 2\sin\theta \quad \therefore x = 0, \quad -4\sin\theta$$

x_1 は C_1 と x 軸との共有点のうちで、原点でないものの x 座標だから

$$x_1 = -4\sin\theta$$

同様にして、円 C_2 と x 軸との交点を求めるために C_2 の式で $y = 0$ とすると

$$(x - \cos 2\theta)^2 = 1 - \sin^2 2\theta \\ = \cos^2 2\theta$$

両方の平方根をとって

$$x - \cos 2\theta = \pm \cos 2\theta \quad \therefore x = 0, \quad 2\cos 2\theta$$

x_2 は C_2 と x 軸との共有点のうちで、原点でないものの x 座標だから、

したがって、 $x_1 + x_2$ は

$$x_1 + x_2 = -4\sin\theta + 2\cos 2\theta$$

2倍角の公式 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ をもちいて変形すると

$$x_1 + x_2 = -4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 2 \\ = -4\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + 3$$

この式を $\sin\theta$ の2次関数として見れば、

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$ より、求める $x_1 + x_2$ の最大値、最小値は

$$\left. \begin{array}{l} \sin\theta = -\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \\ \theta = 210^\circ, 330^\circ \quad \text{のとき} \quad \text{最大値 } 3 \\ \sin\theta = 1 \quad \text{すなわち} \\ \theta = 90^\circ \quad \text{のとき} \quad \text{最小値 } -6 \end{array} \right\} \quad \dots(\text{答})$$

〔3〕

背理法を用いて証明する。まず、2点間の距離の公式より

$$PT = \sqrt{\left(a - \sqrt{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2}$$

$$QT = \sqrt{\left(c - \sqrt{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)^2}$$

$PT = QT$ であると仮定すると

$$PT^2 = QT^2$$

$$\left(a - \sqrt{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(c - \sqrt{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)^2$$

整理すると

$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + \frac{2}{3}(b - d) = 2\sqrt{2}(c - a)$$

a, b, c, d は有理数であるから

$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + \frac{2}{3}(b - d) = 0 \dots\dots ① \quad \text{かつ} \quad c - a = 0 \dots\dots ②$$

②より、 $a = c$ これを①に代入すると

$$d^2 - b^2 + \frac{2}{3}(b - d) = 0 \quad (d - b)\left(b + d - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$d = b \quad \text{または} \quad b + d = \frac{2}{3}$$

b, d は整数なので $d = b$ となり、2点 P, Q は同一点となる。これは、2点 P, Q が相異なる格子点であることに反する。したがって、任意の2つの異なる格子点 $P(a, b)$

$Q(c, d)$ は点 $T\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ から等距離にない。

(証明終)