

〔1〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。
途中の計算を書く必要はない。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2(k+1) \\ k+4 & k^2-4k-9 \end{pmatrix}$ が $(A - E)^2 = O$ を満たすとき $k =$ (ア) である。

$x^{10} = \{(x-1) + 1\}^{10} = \sum_{j=0}^{10} a_j(x-1)^j$ (a_j は定数) と表すとき $a_0 =$ (イ) , $a_1 =$ (ウ) だから,
 $A^{10} =$ (エ) $A -$ (オ) $E =$ (カ) である。ただし, E は単位行列で, O は零行列である。また,
 (カ) は数値を成分とする行列である。

(2) さいころ 1 つを n 回振って出る目の最大値が j ($1 \leq j \leq 6$) となる確率 $p(j)$ を求めたい。まず, $p(1) =$ (キ) である。次に, 最大値が 2 以下である確率は (ク) であること, および, 最大値が 1 である事象と最大値が 2 である事象は排反であることに注意すると, $p(2) =$ (ケ) である。同様の考察により, 一般の j に対して $p(j) =$ (コ) である。よって, さいころ 1 つを n 回振って出る目の最大値の期待値は $6 - \frac{1}{6^n} \sum_{j=1}^5$ (サ) である。

〔2〕

座標空間内に 2 点 $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$ がある. 平面 $z = 0$ に含まれる円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を点 P が動くとき,

三角形 ABP の面積 S の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの P の座標をそれぞれ求めよ.

〔3〕

次の問いに答えよ.

- (1) 微分可能な関数 $f(t)$ について次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^x f(t) dt = xf(x) - \int_0^x tf'(t) dt$$

- (2) 0 以上の整数 n について $f_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} dt$ とおくとき, $f_n(x)$ を用いて $f_{n+1}(x)$ を表せ.

- (3) $f_1(x)$ を求めよ.

- (4) $g_n(x) = (1+x^2)^{n-\frac{1}{2}} f_n(x)$ とおくとき, $n \geq 1$ ならば $g_n(x)$ が整式であることを示し, その最も次数の高い項の係数 a_n を求めよ.

- (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x)$ を求めよ.

〔4〕

xy 平面において、4点 $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ を頂点とする正方形を P とする．また、 $t > 0$ とし、4点 $(3 - t, 9 - t), (3 + t, 9 - t), (3 + t, 9 + t), (3 - t, 9 + t)$ を頂点とする正方形を Q とする．このとき、次の問いに答えよ．

(1) P と Q の両方に含まれる部分 R の面積 S を求めよ．

(2) Q の面積を T とし、 $I = \frac{S}{T}$ とおく． I の最大値とそのときの t を求めよ．