

[1]

(1) ア $\frac{p-1}{2}$

イ $\sqrt{p+1}$

ウ 3

エ $\frac{1}{\sqrt{3-p}}$

(2) オ $\frac{1}{3}$

カ $\frac{2}{3}$

キ 0

(3) ク $\frac{5}{36}$

ケ $\frac{5}{72}$

コ 0

[2]

ア $2t$

イ $-t^2$

ウ $q < p^2$

エ $p - \sqrt{p^2 - q}$

オ $\frac{1}{3}(p^2 - q)^{\frac{3}{2}}$

カ $2 - 2\sqrt{2}$

キ $2 + 2\sqrt{2}$

ク $\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}p^2 + 2p + 2\right)^{\frac{3}{2}}$

ケ 2

コ $\frac{8}{3}$

[3]

S と π が共有点を持つ

$\Leftrightarrow S$ の中心 $(1, 0, 0)$ と π の距離が 2 以下 $\dots(*)$

となるが、まず、 π 上の点

$$(x, y, z) = (1 + s + t, -1 + 2t, a - s + t)$$

と $(1, 0, 0)$ の距離の 2 乗は、

$$\begin{aligned} & (s+t)^2 + (-1+2t)^2 + (a-s+t)^2 \\ &= 2s^2 - 2as + 6t^2 + (2a-4)t + a^2 + 1 \\ &= 2\left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + 6\left(t + \frac{a-2}{6}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{(a-2)^2}{6} + a^2 + 1 \\ &= 2\left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + 6\left(t + \frac{a-2}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}(a+1)^2 \end{aligned}$$

となり、ここで $(1, 0, 0)$ と π の距離とは、 s と t を動かしたときの上の距離の最小値だから、その 2 乗について、

上の式で $s = \frac{a}{2}$, $t = -\frac{a-2}{6}$ として、

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+1)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -1 - 2\sqrt{3} \leq a \leq -1 + 2\sqrt{3} \quad \dots (\text{答})$$