［1］

(1) (ア) 2　　(イ) 7

(ウ) -2　　(エ) 1

(オ) $\frac{3}{5}(7^n-2^n)$

(2) (カ) $-\log_3 5$　　(キ) -16

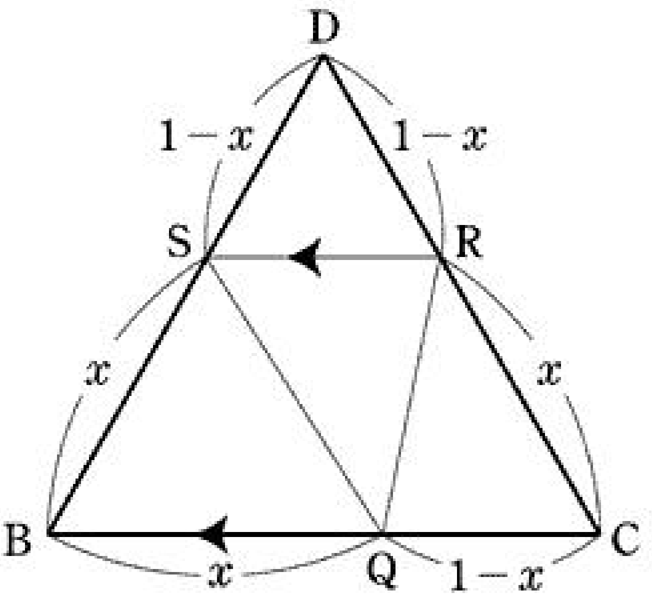
(ク) -2　　(ケ) 0

［2］

(1)　底面を△BCDとして考える。

△BCDは一辺の長さが1の正三角形だから，

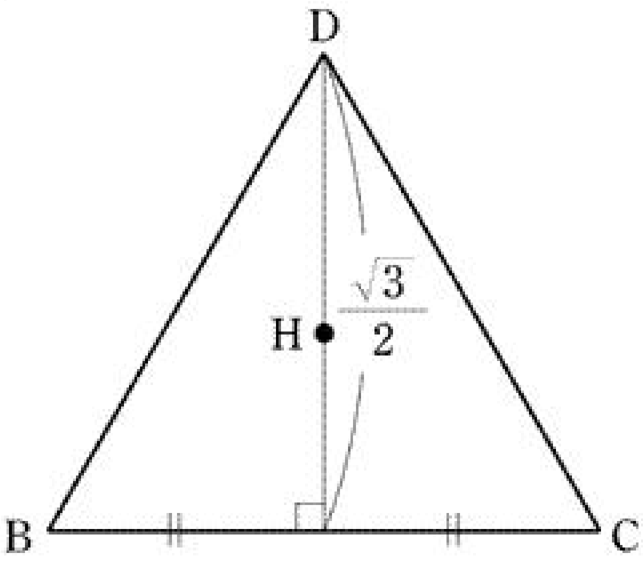
$$\triangle BCD=\frac{\sqrt{3}}{4}$$



△QRSについて，SRを底辺とみると，BC // SRだから三角形の相似比を考えて，

$$\triangle QRS=\triangle BCD\cdot x(1-x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x(1-x)$$

次に，Aから△BCDに下ろした垂線の足をHとすると，Hは△BCDの重心となるから，右図により，



$$DH=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，正四面体ABCDの高さは，

$$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

四面体PQRSの高さはこれを$1-x$倍したものだから，

$$V=\frac{1}{3}\triangle QRS\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}(1-x)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}x(1-x)^2 \quad \cdots（答）$$

(2)

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right) \qquad (0<x<1)$$

よって，Vの増減表は次のようになる.

x	0	…	$\frac{1}{3}$	…	1
$\frac{dV}{dx}$	＋	＋	0	－	0
V	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{81}$	↘	0

したがって，Vは$x=\frac{1}{3}$のときに最大値$\frac{\sqrt{2}}{81}$をとる. …（答）

［3］

(1)　$\sin 2nt = 0 \quad \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる条件を考えると，

$0 < 2nt < n\pi$ より，

$$2nt = \pi,\quad 2\pi,\quad \cdots,\quad (n-1)\pi$$

$$\therefore\quad t = \frac{k}{2n}\pi \quad (k = 1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n-1)$$

よって，交点の個数は $n-1$ …（答）

(2)　$S_1 = \displaystyle\int_0^1 y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos t\,dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t \cos^2 t\,dt$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \quad \cdots \text{（答）}$$

(3)　$S_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 y\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t \cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4t \cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5t + \sin 3t)dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 5t + \sin 3t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{3}\cos 3t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{3}\cos 3t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15} \quad \cdots \text{（答）}$$

(4)　$V_n = \pi\displaystyle\int_0^1 y^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2nt \cos t\,dt$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4nt)\cos t\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\cos t - \frac{1}{2}\cos(4n+1)t - \frac{1}{2}\cos(4n-1)t\right\}dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\sin t - \frac{1}{2(4n+1)}\sin(4n+1)t - \frac{1}{2(4n-1)}\sin(4n-1)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{2(4n+1)} + \frac{1}{2(4n-1)}\right\}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{\pi}{2} \quad \cdots \text{（答）}$$

［4］

(1)　$a_k=\dfrac{1}{3}$　$(1\leqq k\leqq 3)$

(2)　$b_k=\dfrac{1}{4}$　$(1\leqq k\leqq 4)$

(3)　$c_k=\dfrac{1}{5}$　$(1\leqq k\leqq 5)$

(4)　$P(R_n=1)=\dfrac{1}{n+1}$　…①

と推定される。nについての数学的帰納法で示す。

(i)　$n=2$のとき，(1)より①は成り立つ。

(ii)　$n=l$のとき①が成り立つと仮定する。

右の模式図より，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (1,\ l+1) \arrow[dl] \\ (1,\ l+2) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} P(R_{l+1}=1)&=\frac{l+1}{l+2}P(R_l=1)\\ &=\frac{1}{l+2} \end{aligned}$$

となり，$n=l+1$のときも①が成り立つ。

よって，(i)(ii)より，$n\geqq 2$のとき①が成り立つ。

(5)　$P(R_n=k)=\dfrac{1}{n+1}$　…②

と推定される。nについての数学的帰納法で示す。

(i)　$n=2$のとき，(1)より，$k=2,\ 3$に対して②は成り立つ。

(ii)　$n=l$のとき②が成り立つと仮定する。

右の模式図より，

$(2\leqq k\leqq l+1$のとき$)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (k-1,\ l+3-k) \arrow[dr] & & (k,\ l+2-k) \arrow[dl] \\ & (k,\ l+3-k) & \end{tikzcd}$$

$(k=l+2$のとき$)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (l+1,\ 1) \arrow[dr] & \\ & (l+2,\ 1) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} P(R_{l+1}=k)&=\frac{k-1}{l+2}P(R_l=k-1)+\frac{l+2-k}{l+2}P(R_l=k)\\ &=\frac{k-1+l+2-k}{(l+2)(l+1)}\\ &=\frac{1}{l+2} \end{aligned}$$

となり，$n=l+1$のときも

$2\leqq k\leqq l+2$に対して②が成り立つ。

よって，(i)(ii)より，$n\geqq 2,\ 2\leqq k\leqq n+1$のとき②が成り立つ。