2004—(G)

# 数　学　問　題

## 受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙(4ページ)、記述式解答用紙（あ）1枚、記述式解答用紙（い）1枚、記述式解答用紙（う）1枚、記述式解答用紙（え）1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
3. 試験中に試験用紙の印刷が不鮮明な箇所や汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、4枚の記述式解答用紙の受験番号欄(**それぞれ2カ所、合計8カ所**）に受験番号を記入してください。
5. 解答はすべて**HBの黒鉛筆**または**HB・0.5mm以上の芯のシャープペンシル**で記入してください。
6. 解答は、**解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ**、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
7. 解答中でない解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
8. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば全科目を無効とします。
9. 試験時間の途中で退場することはできません。
   ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、監督者に申し出てください。
10. 試験終了のベルが鳴ると同時に解答をやめてください。
11. 問題用紙は試験終了後、持って帰ってください。

**各問題の解答は，解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること．**
**枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は，採点の対象にはならない．**

## 〔1〕

次の文章中の $\boxed{\phantom{(ア)}}$ に適する式または数値を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{\phantom{(ア)}}$ の中に記入せよ．途中の計算を書く必要はない．

（1） 行列 $A, E$ を $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$， $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする．実数 $x, y$ に対する方程式

$$(A-\alpha E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

が $x=y=0$ 以外の解を持つのは実数 $\alpha$ が $\boxed{(ア)}$ または $\boxed{(イ)}$ (ただし $\boxed{(ア)} < \boxed{(イ)}$) のときである．

$$A\begin{pmatrix}3\\ \boxed{(ウ)}\end{pmatrix}=\boxed{(ア)}\begin{pmatrix}3\\ \boxed{(ウ)}\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\ \boxed{(エ)}\end{pmatrix}=\boxed{(イ)}\begin{pmatrix}1\\ \boxed{(エ)}\end{pmatrix}$$

を用いて，$A^n$ ($n$ は自然数) を求めると，$A^n$ の $(1,2)$ 成分は $\boxed{(オ)}$ となる．

（2） $f(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4x}-\dfrac{10}{3^x}+9$ は $x=\boxed{(カ)}$ のとき最小値 $\boxed{(キ)}$ をとる．また，$f(x)=0$ の解は $x=\boxed{(ク)}, \boxed{(ケ)}$ (ただし $\boxed{(ク)} < \boxed{(ケ)}$) である．

〔**2**〕　一辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，点 P, Q, R を辺 AB, BC, CD 上にそれぞれ AP = BQ = CR = $x$ であるようにとり，点 S を辺 BD 上に BS = $x$ であるようにとる．ただし，$0 < x < 1$ とする．点 P, Q, R, S を頂点とする四面体の体積を $V$ とするとき，次の問いに答えよ．

（1） $V$ を $x$ の式で表せ．

（2） $x$ が変化するとき，$V$ の最大値を求めよ．

〔**3**〕　$n$ が自然数のとき，曲線 $\mathrm{C}_n : x=\sin t,\ y=\sin 2nt\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．$\mathrm{C}_n$ と $x$ 軸とで囲まれる部分の面積を $S_n$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x$ 軸の $0<x<1$ の部分と $\mathrm{C}_n$ との交点の個数を求めよ．

(2)　$S_1$ を求めよ．

(3)　$S_2$ を求めよ．

(4)　$\mathrm{C}_n$ と $x$ 軸とで囲まれる部分を $x$ 軸の周りに回転してできる立体の体積を $V_n$ とする．$n \to \infty$ のとき，$V_n$ の収束，発散を調べよ．収束するときはその極限値を求めよ．

〔**4**〕　赤と白の玉が入っている袋から 1 個の玉を取り出し，それを袋に戻すと同時に同じ色の玉をもう 1 個袋の中に入れる操作について考える．はじめは袋には赤と白の玉が 1 個ずつ入っているとし，上記の操作を $n$ 回繰り返した後の袋の中の赤い玉の個数を $R_n$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，(1) から (3) までについては途中の計算を書く必要はない．

(1)　$1 \leqq k \leqq 3$ のとき $R_2=k$ となる確率 $a_k$ を求めよ．

(2)　$1 \leqq k \leqq 4$ のとき $R_3=k$ となる確率 $b_k$ を求めよ．

(3)　$1 \leqq k \leqq 5$ のとき $R_4=k$ となる確率 $c_k$ を求めよ．

(4)　一般に $n \geqq 2$ のとき，$R_n=1$ となる確率 $P(R_n=1)$ を求めよ．

(5)　一般に $n \geqq 2,\ 2 \leqq k \leqq n+1$ のとき，$R_n=k$ となる確率 $P(R_n=k)$ を求めよ．

[参考]　$n=1$ の場合を表す模式図を下に示す．