

数 学 問 題

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙（8 ページ）、記述式解答用紙（あ）1 枚、記述式解答用紙（い）1 枚、記述式解答用紙（う）1 枚、記述式解答用紙（え）1 枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って1 枚ずつ切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷が不鮮明な箇所や汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、4 枚の記述式解答用紙の受験番号欄（それぞれ 2 カ所、合計 8 カ所）に受験番号を記入してください。
5. 解答はすべて HB の黒鉛筆または HB・0.5mm 以上の芯のシャープペンシルで記入してください。
6. 解答は、**解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ**、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
7. 解答中でない解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
8. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば全科目を無効とします。
9. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、監督者に申し出てください。
10. 試験終了のベルが鳴ると同時に解答をやめてください。
11. 問題用紙は試験終了後、持って帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

〔1〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ について $A^2 = \text{ (ア) }$, $A^3 = \text{ (イ) }$ である。また,

$E + A + A^2 + \cdots + A^n = O$ となる 100 以下の自然数 n のうちで最小のものは (ウ)

であり、最大のものは (エ) である。ただし、 E は単位行列、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(2) $f(x) = \frac{2\log x + 3}{x}$ ($x > 0$) とおく。 $f'(x) = \text{ (オ) }$ なので $f(x)$ は $x = \text{ (カ) }$ のとき
最大値 (キ) をとる。また $\int f(x) dx = \text{ (ク) }$ である。ただし、積分定数は省略してよい。

〔2〕

$k < 3$ とする. $f(x) = \cos 3x + k \cos x + 2\sqrt{2}$ とおく.

(1) $t = \cos x$ とおくとき, $g(t) = f(x)$ となるような関数 $g(t)$ を求めよ.

(2) $g(t)$ の $t > 0$ における最小値とそのときの t の値を求めよ.

(3) 方程式 $f(x) = 0$ が $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ で異なる 4 個の解をもつような k の値の範囲を求めよ.

〔3〕

袋に赤玉、青玉、白玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている．この袋からでたらめに玉を 1 個取り出し、玉の色を見た上で袋にもどす試行を考える．

- (1) この試行を n 回行なうとき、取り出した玉の色が 1 種類である確率 $a(n)$ ($n \geq 1$) を求めよ．
- (2) この試行を n 回行なうとき、取り出した玉の色が 2 種類である確率 $b(n)$ ($n \geq 2$) を求めよ．
- (3) この試行を n 回行なうとき、取り出した玉の色が 3 種類である確率 $c(n)$ ($n \geq 3$) を求めよ．
- (4) この試行を繰り返し、取り出した玉の色が n 回目で初めて 3 種類になる確率 $p(n)$ ($n \geq 3$) を求めよ．
- (5) この試行を最大 5 回まで繰り返す．ただし、取り出した玉の色が 3 種類になったらそこで試行を終了するものとする．試行回数の期待値 E を求めよ．

〔4〕

座標空間において、直線 ℓ は原点 O を通り、 $\vec{v} = (1, 1, 1)$ に平行とする。また、2 点 $P_0(-1, 2, z)$ 、 $P_1(5, 0, 1)$ を考える。線分 OP_0 は直線 ℓ に垂直とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) z の値を求めよ。

(2) 線分 P_0P_1 を $s : (1 - s)$ (ただし、 $0 \leq s \leq 1$) に内分する点を P とする。 ℓ 上の点 Q を、直線 ℓ と線分 PQ が垂直になるように定める。このときの Q の座標、および線分 PQ の長さ $\overline{PQ}$ を求めよ。

(3) $\overline{OQ} = t$ とおく。 s を t で表せ。

(4) $s = 1$ のときの Q を Q_1 と表すとき、線分 OP_0 、 P_0P_1 、 P_1Q_1 をそれぞれ ℓ の周りに回転してできる図形で囲まれた部分を D とする。 Q を通り ℓ に垂直な平面で D を切ったとき、断面積 A を t で表せ。

(5) D の体積 V を求めよ。

——— このページは白紙です。 ———

——— このページは白紙です。 ———

——— このページは白紙です。 ———