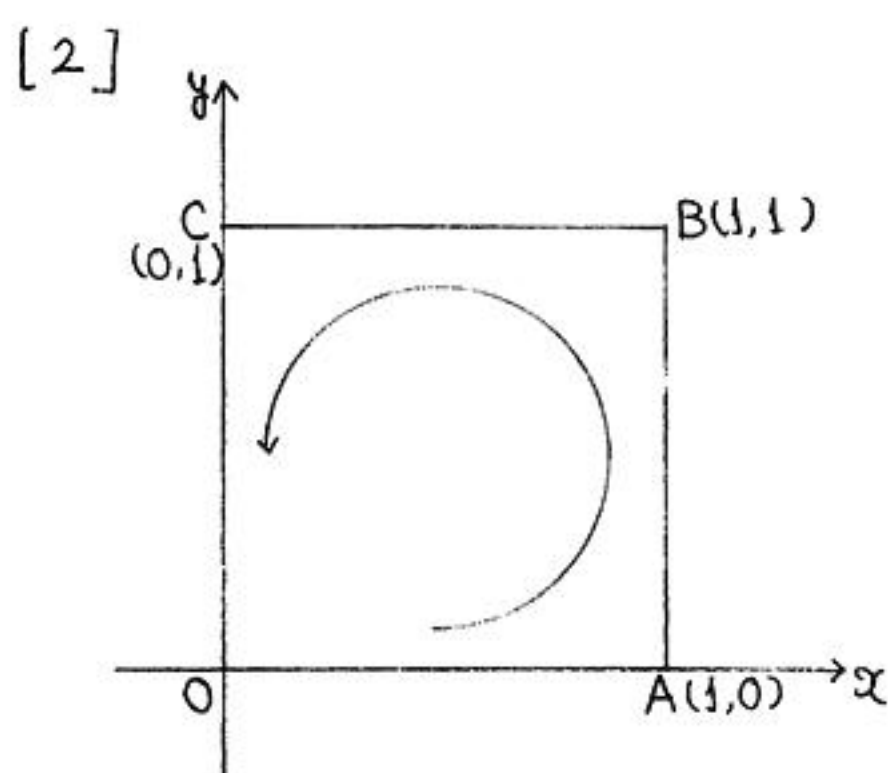


[1]

$$(1) \quad (3) \frac{3}{4} \quad (1) \frac{1}{6} \quad (5) -\frac{1}{12} \quad (1) \frac{1}{6} \quad (4) \frac{5}{6}$$

$$(2) \quad (4) \frac{1}{2}(e-1) \log t + \frac{1}{2}(e-t)$$

$$(4) \frac{1}{2}(e-1) \quad (2) \frac{1}{2}(e-1) \log(e-1) + \frac{1}{2}$$



各回の試行において、0, 1, 2 当たる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ である。また、各回の試行は互いに独立である。

n 回試行後の 0, 1, 2 の回数を x, y, z (x, y, z は 0 から n までの整数で、 $x+y+z=n$) とし、そのような事象 $A_{(x,y,z)}$ 起こる確率を $P_{(x,y,z)}$ と表す。

- (1) この試行を 4 回繰り返すとき、電車が全く動かない。

$$\Leftrightarrow A_{(4,0,0)}$$

$$\text{よって、その確率は } P_{(4,0,0)} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = \underline{\underline{\frac{1}{81}}}$$

- (2) この試行を 4 回繰り返すとき、電車が正方形を 2 周して 0 に戻る。

$$\Leftrightarrow A_{(0,0,4)}$$

$$\text{よって、その確率は } P_{(0,0,4)} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = \underline{\underline{\frac{1}{81}}}$$

- (3) この試行を 4 回繰り返すとき、A, C に停車せずに 1 周して 0 に戻る。

$$\Leftrightarrow A_{(2,0,2)}$$

4 回のうち、2 の 2 回を 0 にするかで ${}_4C_2 = 6$ 通りあるので、

$$\text{その確率は } P_{(2,0,2)} = {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{3^4} = \underline{\underline{\frac{2}{27}}}$$

- (4) 4 回の試行後、1 周して 0 に戻る。

$$\Leftrightarrow A_{(2,0,2)} \text{ または } A_{(1,2,1)} \text{ または } A_{(0,4,0)}$$

$$\downarrow$$

(3)

$$\downarrow$$

(a)

$$\downarrow$$

(b)

(a) $A_{(1,2,1)}$ が起こる確率

$$P_{(1,2,1)} = {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{12}{3^4}$$

(b) $A_{(0,4,0)}$ が起こる確率

$$P_{(0,4,0)} = \frac{1}{3^4}$$

(1) ~ (3), (a), (b) の事象は互いに排反であるから、4 回の試行後に電車が 0 に戻る確率は

$$\begin{aligned} & P_{(4,0,0)} + \{ P_{(2,0,2)} + P_{(1,2,1)} + P_{(0,4,0)} \} + P_{(0,0,4)} \\ &= \frac{1}{3^4} + \left(\frac{6}{3^4} + \frac{12}{3^4} + \frac{1}{3^4} \right) + \frac{1}{3^4} \\ &= \frac{1}{3^4} (1 + 6 + 12 + 1 + 1) = \frac{21}{3^4} = \frac{7}{3^3} = \underline{\underline{\frac{7}{27}}} \end{aligned}$$

- (5) 電車が 1 周して 0 に戻る場合で、くじを引く回数が

$$2 \text{ 回} \cdots A_{(0,0,2)}$$

$$P_{(0,0,2)} = \frac{1}{3^2}$$

$$3 \text{ 回} \cdots \begin{cases} A_{(1,0,1)} \rightarrow A_{(0,0,1)} \\ A_{(0,2,1)} \end{cases}$$

$$P_{(1,0,1)} \cdot P_{(0,0,1)} = {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3^3}$$

$$P_{(0,2,1)} = {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3^3}$$

$$4 \text{ 回} \cdots (\text{上記以外の場合})$$

$$1 - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^3} \right) = \frac{19}{3^3}$$

よって、くじを引く回数の

期待値は

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^3} \right) + 4 \cdot \frac{19}{3^3} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 5 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{19}{3^3} \\ &= \frac{1}{3^3} (6 + 15 + 76) = \frac{97}{3^3} = \underline{\underline{\frac{97}{27}}} \end{aligned}$$

[8]

$$(1) \quad \frac{d}{dx}(e^x \sin x) = e^x \cos x + e^x \sin x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x \cos x) = e^x \cos x - e^x \sin x \quad \cdots \textcircled{2}$$

① - ②

$$\frac{d}{dx}\{e^x(\sin x - \cos x)\} = 2e^x \sin x$$

よ、 τ ,

$$\int f(x) dx = \int e^x \sin x dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C_1}} \quad (C_1: \text{積分定数})$$

① + ②

$$\frac{d}{dx}\{e^x(\sin x + \cos x)\} = 2e^x \cos x$$

よ、 τ ,

$$\int g(x) dx = \int e^x \cos x dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C_2}} \quad (C_2: \text{積分定数})$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) = F(x) \text{ とおく.}$$

$$\int F(x) dx = \frac{1}{2} \left\{ \int f(x) dx - \int g(x) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \right\} + C_3$$

$$= -\frac{1}{2} e^x \cos x + C_3 \quad (C_3: \text{積分定数})$$

よ、 τ ,

$$\begin{aligned} \int x f(x) dx &= x F(x) - \int (x)' F(x) dx \\ &= x \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) - \left(-\frac{1}{2} e^x \cos x\right) + C_4 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} e^x \{x(\sin x - \cos x) + \cos x\} + C_4}} \quad (C_4: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ において, } x f(x) = x e^x \sin x \geq 0, \quad 0 \cdot f(0) = \pi \cdot f(\pi) = 0. \text{ よ、 } \tau$$

$$S = \int_0^\pi x f(x) dx = \left[\frac{1}{2} e^x \{x(\sin x - \cos x) + \cos x\} \right]_0^\pi$$

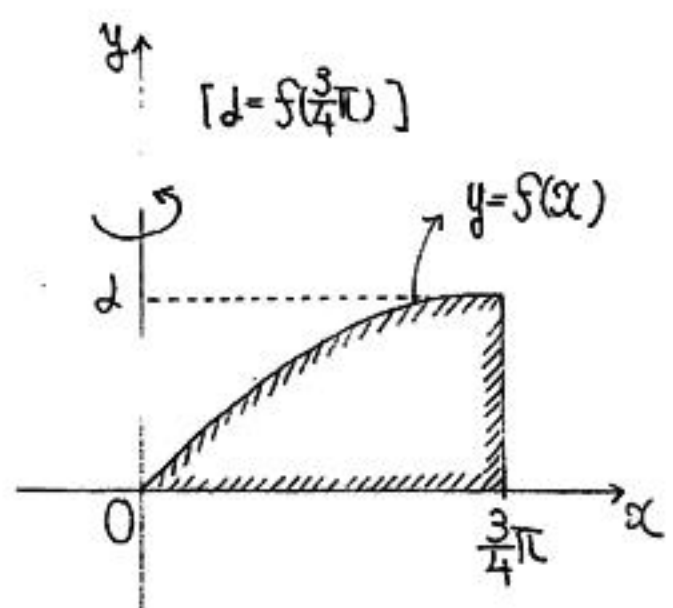
$$= \frac{1}{2} \{ e^\pi \{ \pi(\sin \pi - \cos \pi) + \cos \pi \} - e^0 \{ 0(\sin 0 - \cos 0) + \cos 0 \} \}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \{ e^\pi (\pi - 1) - 1 \}}}$$

$$(4) \quad f(x) = e^x \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= \sqrt{2} e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

x	0	$\frac{3}{4}\pi$
$f(x)$	+	0 (-)
$f'(x)$	0	$\rightarrow$ 極大 ($\searrow$)



$$V = \pi \int_0^1 \left\{ \left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 - x^2 \right\} dy$$

$$\left[\begin{array}{l} y = f(x) \text{ より} \\ dy = f'(x) dx \end{array} \quad \frac{y|_0 \rightarrow 1}{x|_0 \rightarrow \frac{3}{4}\pi} \right]$$

$$= \pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \left\{ \left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 - x^2 \right\} f'(x) dx$$

$$= \pi \left\{ \left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 \int_0^{\frac{3}{4}\pi} f'(x) dx - \int_0^{\frac{3}{4}\pi} x^2 f'(x) dx \right\}$$

$$= \pi \left\{ \left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 \{ f(\frac{3}{4}\pi) - f(0) \} - \left[x^2 f(x) \right]_0^{\frac{3}{4}\pi} - \int_0^{\frac{3}{4}\pi} 2x \cdot f(x) dx \right\}$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} x f(x) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} e^x \{x(\sin x - \cos x) + \cos x\} \right]_0^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= \pi \{ e^{\frac{3}{4}\pi} \{ \frac{3}{4}\pi (\sin \frac{3}{4}\pi - \cos \frac{3}{4}\pi) + \cos \frac{3}{4}\pi \} - e^0 \{ 0(\sin 0 - \cos 0) + \cos 0 \} \}$$

$$= \pi \{ e^{\frac{3}{4}\pi} \left(\frac{3}{4}\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 \}$$

$$= \underline{\underline{\pi \{ \sqrt{2} e^{\frac{3}{4}\pi} \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} \right) - 1 \}}}$$

[4]

$$1, \mid 2, 2, \mid 3, 3, 3, \mid 4, 4, 4, 4 \mid 5, \dots$$

第1群 第2群 第3群 第4群

数列 $\{a_n\}$ を上のように $\mid$ で区切って群に分け、第 n 群に n 個の項が存在するようにする。

(1) $a_n = k$ となる a_n は第 k 群に属している。

第 k 群の最後の項は、 $\{a_n\}$ の第 $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ 項

第 $(k-1)$ 群の最後の項は、 $\{a_n\}$ の第 $1+2+\dots+(k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$ 項。

$$\text{よって, } a_n = k \Leftrightarrow \frac{(k-1)k}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\text{また, } 91 = \frac{13 \cdot 14}{2} < 100 \leq \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$$

より、 a_{100} は第14群に属するので、 $a_{100} = \underline{14}$ 。

(2) a_{100} は第14群の $100 - 91 = 9$ 項目。

第 k 群に属する項の和は k^2 であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} a_n &= \sum_{k=1}^{13} k^2 + 14 \cdot 9 \\ &= \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 13 \cdot 7 \cdot 9 + 14 \cdot 9 \\ &= 7 \cdot 9 \cdot (13 + 2) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \\ &= \underline{945} \end{aligned}$$

(3) 第 $2k$ 群に $2k$ 個の偶数があるので、求める個数は

$$\sum_{k=1}^6 2k + 9 = 2 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 9 = \underline{51} \text{ (個)}$$

$$(4) \quad a_n = k \Leftrightarrow \frac{(k-1)k}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

[各項は正なので]

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k(k+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(k-1)k}}$$

よって、 $a_n = k$ のとき

$$\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{k(k+1)}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{(k-1)k}}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $k \rightarrow \infty$ であり、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{k(k+1)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{(k-1)k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{k}}} = \sqrt{2}$$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \underline{\sqrt{2}}$$